

DOI:10.13409/j.cnki.jdpme.20230329001

基于 Copula 理论的高桩码头岸坡可靠性分析*

范军甫¹, 崔春义^{1,2}, 季则舟³, 熊琦¹, 尤再进², 王坤鹏¹

(1. 大连海事大学土木工程系, 辽宁 大连 116026; 2. 大连海事大学港口与航运安全协同创新中心, 辽宁 大连 116026; 3. 中交第一航务工程勘察设计院有限公司, 天津 300222)

摘要:高桩码头岸坡稳定性对整体码头结构安全至关重要。为进一步探究高桩码头岸坡土体强度参数相关性及其空间变异性对高桩码头岸坡可靠性的影响规律,基于 Copula 理论考虑岸坡土体参数的联合概率分布特性,采用 PLAXIS 计算平台建立高桩码头-岸坡体系数值计算模型,进一步通过 Python API 接口,编译完成了可自动数据交互与求解的外挂子程序 SAPW,并实现了高桩码头岸坡体系参数化前处理、样本工况计算和可靠性求解的一体化、全链条可靠性分析框架流程,并在此基础上结合蒙特卡罗模拟方法,开展了相关数值计算与参数化分析,探讨了黏聚力、内摩擦角变异系数以及二者相关系数对高桩码头岸坡可靠性的影响规律。结果表明:在高桩码头设计与分析中,忽略土体参数相关性和空间变异性会高估岸坡失效概率,进而导致相关可靠度分析偏于保守,在高桩码头岸坡可靠度分析中宜采用多种 Copula 函数进行综合考虑。

关键词:高桩码头; 岸坡; 可靠性分析; Copula 理论; 桩土相互作用

中图分类号: U656 **文献标识码:** A **文章编号:** 1672-2132(2024)03-0518-07

Reliability Analysis of Piled Wharf and Bank Slope Based on Copula Theory

FAN Junfu¹, CUI Chunyi^{1,2}, JI Zezhou³, XIONG Qi¹, YOU Zaijin², WANG Kunpeng¹

(1. Department of civil engineering, Dalian Maritime University, Dalian 116026, China; 2. Center for Port and Maritime Safety, Dalian 116026, China; 3. CCCC First Harbor Consultants Co., Ltd., Tianjin 300222, China)

Abstract: The stability of bank slopes in a piled wharf is critical for the overall safety of the wharf structure. In order to further investigate the influence of the correlation and spatial variability of soil strength parameters on the reliability of piled wharf bank slopes, this paper employed Copula theory to analyze the joint probability distribution characteristics of bank slope soil parameters. Utilizing the PLAXIS computational platform, a numerical model of piled wharf-slope system was established. Additionally, an auxiliary subroutine named SAPW was developed via Python API interface to facilitate automatic data exchange and solution computation. This integrated, end-to-end reliability analysis framework encompassed pre-processing of parameters, calculation of sample conditions and reliability solving for the high-pile wharf-slope system. Furthermore, Monte Carlo simulation methods were used to conduct related numerical computations and parameterized analyses, investigating the impact

* 收稿日期:2023-03-29; 修回日期:2023-05-23

基金项目:国家重点研发计划项目(2021YFB2601102)、国家自然科学基金面上项目(51878109, 52178315)、辽宁省航运联合基金项目(2020-HYLH-48)资助

作者简介:范军甫(1998—),男,硕士研究生。主要从事桩土相互作用研究。E-mail: fanjunfu980830@163.com

通信作者:崔春义(1978—),男,教授,博导,博士。主要从事岩土工程数值与解析方法研究。

E-mail: cuichunyi@dlnu.edu.cn

of cohesion, internal friction angle variability, and their correlation coefficients on the reliability of piled wharf bank slopes. The results show that neglecting the correlation and spatial variability of soil parameters in the design and analysis of piled wharfs can overestimate the probability of bank slope failure. This, in turn, leads to a conservative bias in related reliability analyses. Therefore, it is advisable to employ various Copula functions for comprehensive consideration in the reliability analysis of piled wharf bank slopes.

Keywords: piled wharf; bank slope; reliability analysis; Copula theory; pile-soil interaction

0 引言

高桩码头结构作为港口工程的重要结构型式,高桩码头岸坡稳定性对整体码头结构安全至关重要^[1]。岸坡稳定性分析在土体参数、计算模型、试验、统计以及边坡失效状态等诸多方面存在不确定性^[2-3]。其中,岸坡土体参数的边缘分布和联合分布是岸坡稳定分析中不确定性的重要来源。

在土体参数边缘分布方面,学者们针对土体参数呈现的随机性特征,相继提出了多种参数边缘概率分布模型^[4]。具体地,K.Harrop-Williams^[5]指出 β 分布适用于土体参数的边缘分布推断。X.P.Zhou等^[6]则进一步采用正态分布描述土体参数边缘分布。考虑到岩土体参数严格非负性,S.Jiang等^[7]采用对数正态分布表征土体参数的概率统计特性。而陈旺旺等^[8]则采用最大熵法对岩土体力学参数边缘分布进行了估计。

在土体参数联合分布方面,诸多学者先后采用二维正态分布、二维 β 分布以及Nataf分布等描述土体参数的联合概率分布,然而大多并未考虑参数间互相关性的影响。基于此点考虑,X.Tang等^[9]提出了基于Copula函数的土体参数联合分布估计方法。而L.Zhang等^[10]则基于Copula函数考虑参数间相关性,并与贝叶斯模型进行了比较分析。进一步地,X.Z.Wu^[11]采用Gaussian和Frank Copula函数构建了土体参数黏聚力、内摩擦角和容重的联合分布。在此基础上,G.K.Das等^[12]通过引入Copula函数分析了植被对边坡可靠性的影响规律。此外,宋来福等^[13]采用Copula函数建立非线性强度参数联合分布模型,并结合径向基神经网络提出了土石坝坝坡可靠度分析方法。然而,目前Copula理论框架大多是被用于简单土体岸坡可靠度分析中,在高桩码头等复杂结构岸坡可靠度分析中应用较少。

综上所述,本文将采用Copula函数描述土体抗剪强度参数(黏聚力 c 、内摩擦角 φ)的联合概率分布特征,基于PLAXIS计算平台建立高桩码头-岸坡体系数值计算模型,通过PLAXIS-Python API接口编写数据自动交互与求解的外挂子程序,进行土体随机参数概率化设置与建模,并一体化实现外挂随机参数前处理、样本工况计算和可靠性求解功能的全链条分析流程,从而可深入探究黏聚力、内摩擦角变异系数及二者相关系数对高桩码头岸坡可靠性的影响规律。

1 基于Copula函数的土体参数联合分布估计

1.1 Copula理论

Copula函数是将多元联合分布与相应多个一维边缘分布结合的连接函数,其密度反映了各边缘分布之间的相关性强度^[14]。Copula函数见式(1):

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n); \theta) \quad (1)$$

式中, C 为描述变量 (x_1, x_2, \dots, x_n) 之间相关结构的Copula函数; θ 为Copula参数。

由式(1)可知,随机变量联合概率分布构造应包括边缘分布函数和相应的Copula函数两个部分。由于土体抗剪强度参数间存在负相关性,因此本文选用岩土工程中常用来表征土体参数负相关特性的Gaussian Copula函数和Frank Copula函数。

二维Gaussian Copula函数的累积分布函数见式(2):

$$C(u, v; \theta) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\theta^2}} \exp\left(-\frac{x^2 - 2\theta uv + v^2}{2(1-\theta^2)}\right) dudv \quad (2)$$

式中, $\Phi(\cdot)$ 和 $\Phi^{-1}(\cdot)$ 分别为标准正态分布函数及其

逆函数; θ 为 Gaussian Copula 参数,可以通过变量 u 、 v 之间的相关系数求出^[14]。

本文选用 Pearson 相关系数 ρ 求得 Copula 参数 θ ,二者 θ 之间存在如下关系^[14]:

$$\rho = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{u - \mu_1}{\sigma_1} \right) \left(\frac{v - \mu_2}{\sigma_2} \right) f_u(u) f_v(v) \cdot D(F_u(u), F_v(v); \theta) dudv \quad (3)$$

式中, u 、 v 为随机变量; μ_1 和 μ_2 分别为变量 u 、 v 的均值; σ_1 和 σ_2 分别为变量 u 、 v 的标准差。

Frank Copula 函数属于阿基米德 Copula 族,其生成元 $\varphi(\cdot)$ 的公式如下:

$$\varphi(t) = -\ln \frac{e^{-\theta t} - 1}{e^{-\theta} - 1} \quad (4)$$

二维 Frank Copula 函数的累计分布函数为:

$$C(u, v; \theta) = -\frac{1}{\theta} \ln \left[1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1} \right] \quad (5)$$

式中, θ 为 Frank Copula 参数。

同理,通过变量 u 、 v 之间的 Pearson 相关系数 ρ 计算 θ ,公式如下:

$$\rho = 1 + \frac{12}{\theta} \left\{ \frac{2}{\theta^2} \int_0^\theta \frac{t^2}{e^t - 1} dt - \frac{1}{\theta} \int_0^\theta \frac{t}{e^t - 1} dt \right\} \quad (6)$$

1.2 高桩码头岸坡土体参数概率分布

岸坡土体参数(黏聚力 c 和内摩擦角 φ)的边缘分布和联合分布特征直接影响岸坡可靠度分析的结果精度^[15]。岩土工程中通常以经验概率分布模型近似描述土体参数分布状态,大多数学者^[16]的实验和研究发现,在岸坡稳定性分析中土体强度参数一般服从正态分布或对数正态分布。因此,本文假设黏聚力 c 和内摩擦角 φ 边缘分布服从正态分布,其概率密度函数见式(7):

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (7)$$

式中, μ 为变量 x 的均值; σ 为变量 x 的标准差。

进一步地,考虑黏聚力 c 和内摩擦角 φ 之间相关性建立二维正态分布模型,其概率密度函数见式(8):

$$f(c, \varphi) = \frac{1}{2\pi\sigma_c\sigma_\varphi\sqrt{1-\rho^2}} \exp \frac{-1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(c-\mu_c)^2}{\sigma_c^2} - 2\rho \frac{(c-\mu_c)(\varphi-\mu_\varphi)}{\sigma_c\sigma_\varphi} + \frac{(\varphi-\mu_\varphi)^2}{\sigma_\varphi^2} \right] \quad (8)$$

式中, ρ 为变量 c 、 φ 间的相关系数。

1.3 基于 Copula 函数的土体参数样本估计

本文中基于 Copula 函数的土体参数样本估计主要分为4步:

第1步,收集土体样本数据(c , φ),确定边缘分布 $f(c)$ 和 $g(\varphi)$,并将样本数据(c , φ)从原始空间变换为秩空间标准均匀分布,其方法见式(9):

$$\begin{cases} u_i = \frac{\text{rank}(x_i)}{n+1} \\ v_i = \frac{\text{rank}(y_i)}{n+1} \end{cases}, i = 1, 2, \dots, n \quad (9)$$

式中, $\text{rank}(\cdot)$ 表示样本 x_i 或 y_i 的秩。

第2步,计算第1步中土体样本数据所对应的 Pearson 相关系数 ρ ,并通过公式(3)进一步得出 Copula 参数 θ 。

第3步,根据 Gaussian Copula 和 Frank Copula 函数将第1步中生成的标准均匀分布变量转换为符合对应 Copula 函数的随机变量。

第4步,根据参数边缘分布逆函数将第3步中所生成的随机变量变换到原始空间,从而得到符合 Gaussian Copula 和 Frank Copula 函数的样本数据。

这样,即可通过上述步骤得到服从指定边缘分布的土体参数等效样本,从而实现基于 Copula 函数的土体参数样本估计。

2 基于 Copula 理论的高桩码头岸坡可靠性分析程序框架

本文提出一种基于 Copula 函数的高桩码头岸坡可靠性分析流程框架。基于 PLAXIS 计算平台建立高桩码头-岸坡体系数值计算模型,通过 PLAXIS-Python API 接口编写数据自动交互与求解的外挂子程序 SAPW,从而可进行土体随机参数概率化设置与建模,并一体化实现外挂随机参数前处理、样本工况计算和可靠性求解功能的全链条分析流程。

在模型前处理方面,采用 Python 外挂程序实现了分别基于 Gaussian Copula 和 Frank Copula 函数的土体样本参数估计,并将能反映空间变异性的土体参数导入数值计算模型,进而驱动 PLAXIS 计算平台进行数值求解分析。

在数据后处理方面,采用 Python 外挂程序驱动

PLAXIS 计算平台, 获取后处理文件中相关数据, 进而采用蒙特卡罗法计算高桩码头岸坡失效概率, 最终实现岸坡可靠度分析的自动化分析流程, 具体流程如下:

(1) 根据土体样本数据及参数边缘概率分布类型生成基于 Copula 函数的土体参数空间变异随机场。

(2) 基于 PLAXIS 计算平台建立高桩码头岸坡体系数值模型, 并启动 PLAXIS 远程服务器并与 Python 解释器连接, 从而完成 PLAXIS 与 Python 数据交互式使用的前期配置。

(3) 调用材料对象内置函数 *setproperties* 将所生成的空间变异随机场土体参数数据导入到对应材料对象中, 并调用前处理全局变量内置函数 *g_i.calculate* 驱动 PLAXIS 计算平台进行模数值计算分析。

(4) 基于蒙特卡罗法 (MCS) 计算高桩码头岸坡失稳概率 $P_f = N_f / N_{MCS}$, 其中 N_{MCS} 为抽样总频数, N_f 为岸坡安全系数小于 1.2 频数^[16]。

3 算例分析

本文以某典型高桩码头为具体对象, 桩基采用混凝土管桩, 桩间距 6 m, 上部由承台面板连接, 岸坡后方堆载为均布荷载, 岸坡坡比为 1:2.5, 高桩码

表 1 高桩码头-岸坡体系材料参数

Table 1 Material parameters of piled wharf-bank slope system

材料	软土	密砂	桩	承台
弹性模量/MPa	3.5	7.0	20 000	20 000
泊松比	0.25	0.30	0.20	0.20
黏聚力/kPa	12	0	—	—
内摩擦角/(°)	20	33	—	—
重度/(kN·m ⁻³)	20	20	24	25

头及岸坡主要材料参数见表 1。

依托 PLAXIS 程序平台建立相应的有限元模型, 通过定义“界面单元”模拟桩-土之间的相互作用, 定义界面单元之后, 会在结构与土接触的位置创建一系列节点对, 节点对之间采用理想弹塑性弹簧模拟土-结构之间的相对滑动和相对裂隙。本文在桩-土效应尚未做特殊考虑, 在生成界面后 PLAXIS 将默认界面材料属性为周边土层的材料属性。

为考虑高桩码头岸坡土体参数间的互相关性, 具体依据文献[17]中所述的土体相关距离作为选取范围, 即垂直距离为 1 m、水平距离为 3~5 m, 并在此基础上对高桩码头岸坡体系进行数值建模, 高桩码头岸坡体系示意及数值模型如图 1 所示。

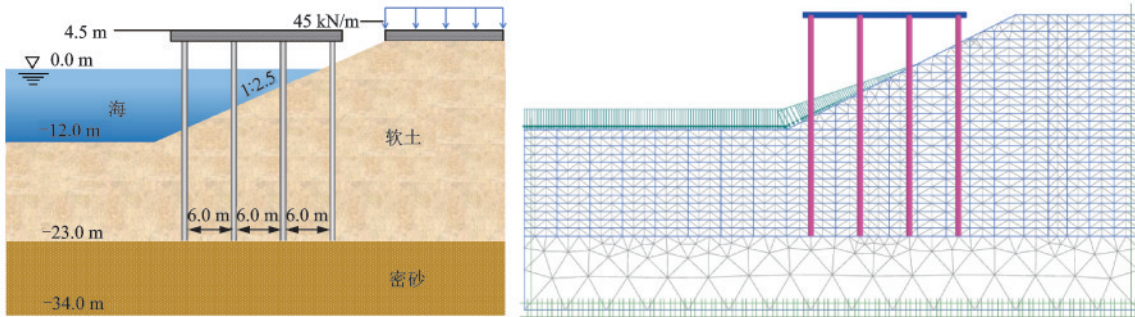


图 1 高桩码头-岸坡体系数值模型

Fig.1 Numerical model of piled wharf-bank slope system

首先, 基于二维正态分布生成岸坡土体样本数据, 土体参数统计特征值如下: 黏聚力和内摩擦角均值分别为 2 kPa、25°; 黏聚力和内摩擦角变异系数均为 0.25; 黏聚力与内摩擦角间相关系数取 -0.5。进一步地, 根据土体样本数据生成分别符合 Gaussian Copula 和 Frank Copula 函数的相关标准均匀分布变量 $U=(U_c, U_\varphi)$, 并通过各自正态分布概率逆函数求解得出对应土体参数的等效样本, 具体如图 2、3 所示。最后, 将能考虑空间变异性的土体参

数等效样本映射到对应高桩码头-岸坡数值模型材料中, 限于篇幅仅显示土体黏聚力参数的空间变异情况如图 4 所示。

这里将针对黏聚力和内摩擦角间相关系数及二者变异系数对高桩码头岸坡可靠性影响规律开展相关分析。具体地, 参考国内外关于岩土强度参数统计数据^[18], 分析中选取土体参数相关系数变化区间为 $\rho_{c,\varphi} \in [-0.7, -0.2]$, 黏聚力变异系数变化

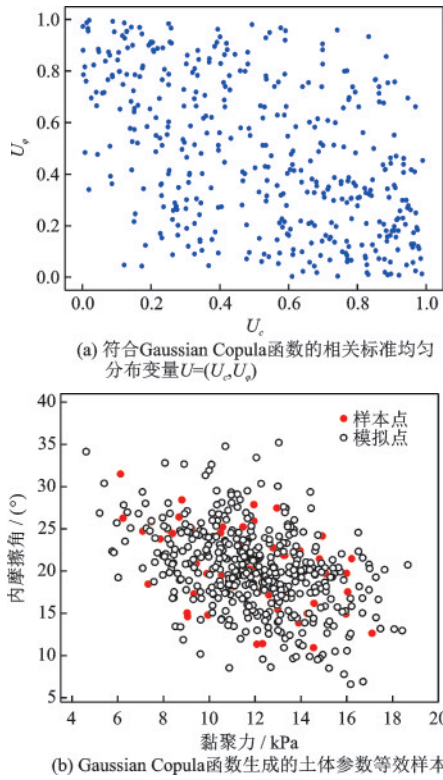


图2 基于Gaussian Copula函数进行土体参数等效样本模拟
Fig.2 Simulation of equivalent samples of soil parameters based on the Gaussian Copula function

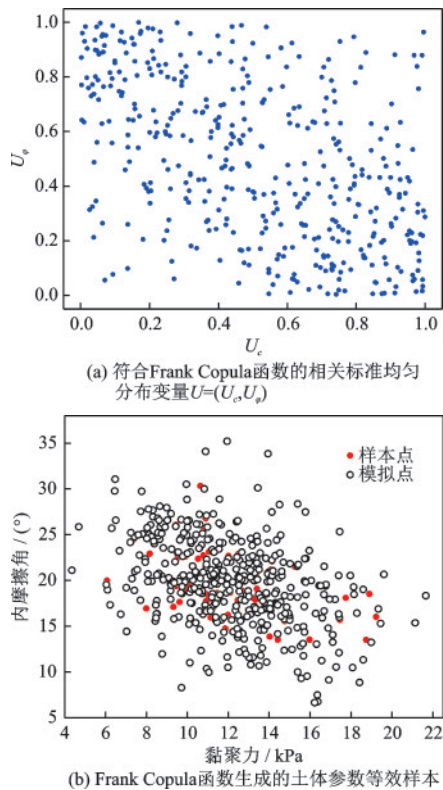


图3 基于Frank Copula函数模拟了土壤参数的等效样本
Fig.3 Simulation of equivalent samples of soil parameters based on the Frank Copula function

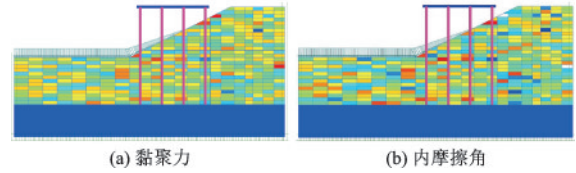


图4 高桩码头岸坡土体强度参数空间变异等值云图
Fig.4 Contours of the spatial variability of soil strength parameters for piled wharf slopes

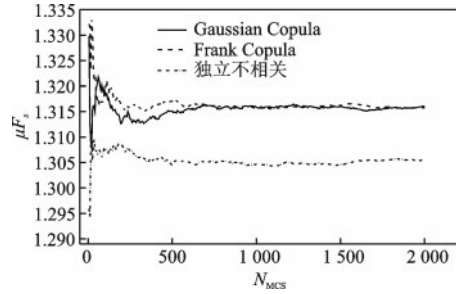


图5 安全系数均值随模拟次数变化曲线
Fig.5 Curve of mean safety factor as a function of simulation iterations

区间为 $Cov_c \in [0.15, 0.65]$, 摩擦角变异系数变化区间为 $Cov_\phi \in [0.15, 0.40]$ 。分析中仅考虑二者独立不相关的情况作为对照组, 共计48个工况, 并在每种工况下生成2000组土体参数模拟数据, 利用前述Python外挂程序SAPW驱动Plaxis计算平台得到高桩码头岸坡安全系数 F_s 样本。具体选取一种典型工况下的3种情况(参数独立不相关、Gaussian Copula模拟及Frank Copula模拟)所对应安全系数均值 μ_{F_s} , 其随抽样总频数 N_{MCS} 的变化曲线如图5所示。由图可见, 高桩码头岸坡安全系数均值 μ_{F_s} 初期随 N_{MCS} 的增加而发生显著幅值变化, 但当 N_{MCS} 超过约700次后, 3种情况对应的 μ_{F_s} 幅值变化均趋于稳定, 且基于Copula函数的两种情况所对应幅值水平相差很小。此外, 在土体强度参数在独立不相关情况下所对应的 μ_{F_s} 幅值明显小于基于Copula函数的2种情况下所求得的 μ_{F_s} 幅值。这也从一个侧面说明忽略参数互相关性会明显低估高桩码头岸坡稳定性安全系数, 进而亦会得出更偏于保守的高桩码头岸坡可靠度分析结果。

进一步地, 基于全部工况所对应的安全系数 F_s 样本, 得出高桩码头岸坡失效概率、可靠度指标以及与 c, ϕ 间相关系数变异系数的关系情况如图6所示。由图6可知, 随着相关系数 $\rho_{c, \phi}$ 、黏聚力变异系数 Cov_c 和内摩擦角变异系数 Cov_ϕ 增大, 高桩码头岸坡失效概率 P_f 均逐渐增加, 可靠度指标均逐渐降低。

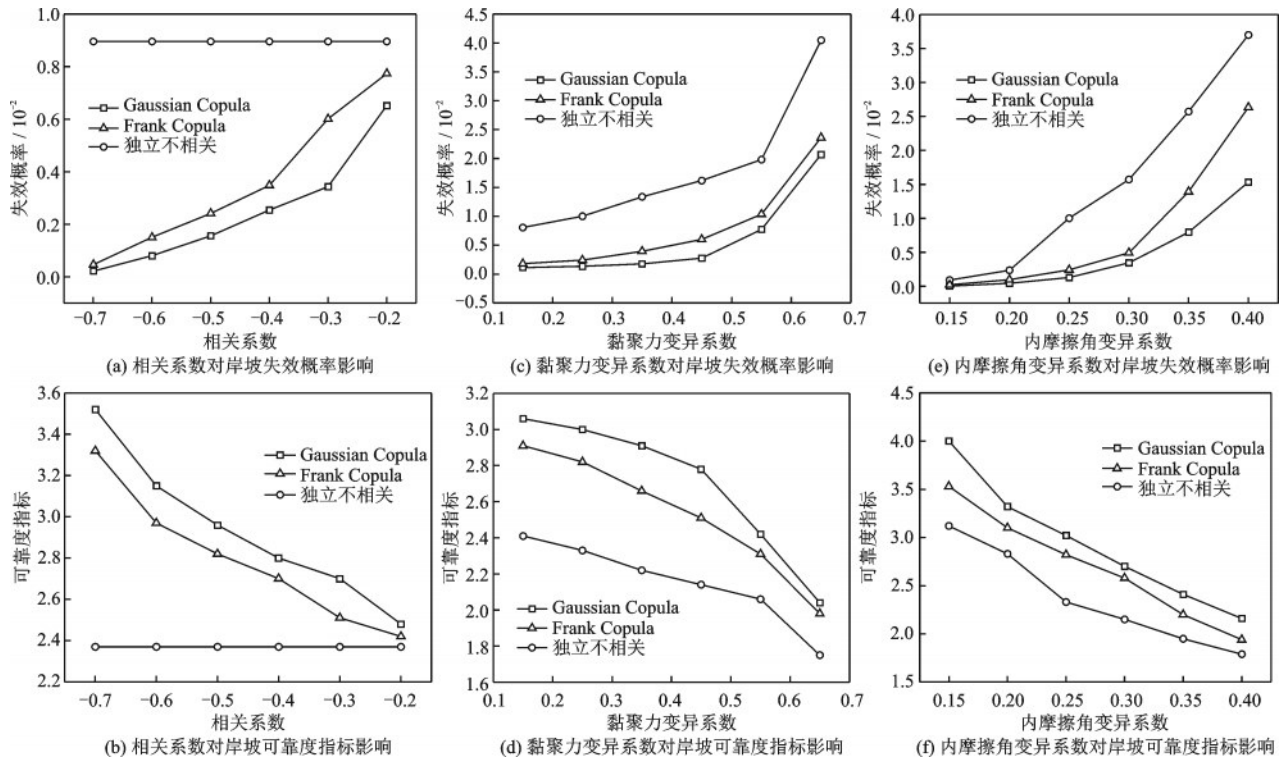


图6 黏聚力、内摩擦角相关系数及变异系数对岸坡可靠性的影响情况

Fig.6 Influence of cohesion, internal friction angle correlation coefficient and variability coefficient on bank slope reliability

以基于 Gaussian Copula 函数模拟的工况为例, P_f 随 Cov_φ 变化幅度最大, 然后是 Cov_c 和 $\rho_{c,\varphi}$ 。因此, 岸坡失效概率对 Cov_φ 敏感程度比 $\rho_{c,\varphi}$, Cov_c 更高。其次, 在参数独立不相关情况下所得出的高桩码头岸坡失效概率明显高于基于 Copula 函数的两种情况所对应结果。这说明忽略岸坡土体参数间互相关性会低估高桩码头岸坡可靠性。此外, 基于 Frank Copula 函数计算所得的高桩码头岸坡失效概率要高于基于 Gaussian Copula 函数计算所得结果, 这也说明 Copula 函数类型对高桩码头岸坡可靠度分析有一定影响, 选择多种 Copula 函数表征土体相关性进行综合考量基础上, 再开展相关评价与分析是十分必要的。

4 结论

基于 PLAXIS 计算平台建立高桩码头-岸坡体系数值计算模型, 通过 PLAXIS-Python API 接口编译实现了可进行数据自动交互与求解的外挂子程序 SAPW, 并在此基础之上, 结合蒙特卡罗法模拟方法探讨了黏聚力、内摩擦角变异系数以及二者相关系数对高桩码头岸坡可靠性的影响规律, 结果表明:

(1) 本文提出的基于 Copula 函数的高桩码头岸坡可靠性分析流程框架及驱动接口程序, 可有效实现

高桩码头岸坡体系包括随机参数前处理、样本工况计算和可靠性求解的全链条、一体化可靠性分析流程。

(2) 在高桩码头岸坡可靠度分析中, 忽略土体黏聚力和内摩擦角间的互相关性的影响会高估岸坡失效概率, 进而导致相关可靠度分析偏于保守。

(3) Copula 函数类型对高桩码头岸坡可靠度分析有一定影响, 宜选择多种 Copula 函数表征土体相关性而综合考量的基础上, 再进一步开展相关安全可靠评价与分析。

参考文献:

- [1] Alzo U A K. Rock slopes processes and recommended methods for analysis[J]. International Journal of GEOMATE, 2016, 11(25): 2520-2527.
- [2] Phoon K K, Kulhawy F H. Characterization of geotechnical variability [J]. Canadian Geotechnical Journal, 1999, 36(4): 612-624.
- [3] Li L, Chu X. Risk assessment of slope failure by representative slip surfaces and response surface function[J]. KSCE Journal of Civil Engineering, 2016, 20(5): 1783-1792.
- [4] 张蕾. 基于 Copula 函数的岩土体抗剪强度参数二维分布模型研究[D]. 武汉: 武汉大学, 2017.

- Zhang L. Bivariate distribution of shear strength parameters of soils and rocks using copula [D]. Wuhan: Wuhan University, 2017. (in Chinese)
- [5] Harrop-Williams K. Probability distribution of strength parameters in uniform soils [J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 1986, 112(3): 20478.
- [6] Zhou X P, Zhu B Z, Wong L N Y. A stability analysis of landslides based on random fields, part II: base circle slope [J]. *Bulletin of Engineering Geology and the Environment*, 2017, 78(11): 1-14.
- [7] Jiang S, Huang J, Yao C, et al. Quantitative risk assessment of slope failure in 2-D spatially variable soil by limit equilibrium method [J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2017, 47: 710-725.
- [8] 陈旺旺, 李典庆, 唐小松, 等. 抗剪强度参数概率分布的最大熵估计及边坡可靠度分析 [J]. *岩土力学*, 2018, 39(4): 1469-1478.
Chen W W, Li D Q, Tang X S, et al. Probability distribution of shear strength parameters using maximum entropy principle for slope reliability analysis [J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2018, 39(4): 1469-1478. (in Chinese)
- [9] Tang X, Li D, Cao Z, et al. Impact of sample size on geotechnical probabilistic model identification [J]. *Computers and Geotechnics*, 2017, 87: 229-240.
- [10] Zhang L, Li D, Tang X, et al. Bayesian model comparison and characterization of bivariate distribution for shear strength parameters of soil [J]. *Computers and Geotechnics*, 2018, 95: 110-118.
- [11] Wu X Z. Trivariate analysis of soil ranking-correlated characteristics and its application to probabilistic stability assessments in geotechnical engineering problems [J]. *Soils and Foundations*, 2013, 53(4): 540-556.
- [12] Das G K, Hazra B, Garg A, et al. Stochastic hydro-mechanical stability of vegetated slopes: An integrated copula-based framework [J]. *Catena*, 2018, 160: 124-133.
- [13] 宋来福, 孔宪京, 徐斌, 等. 基于 Copula 函数的土石坝三维坝坡稳定可靠度分析 [J]. *大连理工大学学报*, 2021, 61(1): 92-103.
Song L F, Kong X J, Xu B, et al. Reliability analysis of 3D rockfill dam slope stability based on Copula Function [J]. *Journal of Dalian University of Technology*, 2021, 61(1): 92-103. (in Chinese)
- [14] Nelsen R B. An introduction to copulas [M]. New York: Springer, 2006.
- [15] Ji J, Zhang C, Gao Y, et al. Effect of 2D spatial variability on slope reliability: A simplified FORM analysis [J]. *Geoscience Frontiers*, 2018, 9(6): 1631-1638.
- [16] 刘春, 白世伟, 赵洪波. 黏性土土性指标的统计规律研究 [J]. *岩土力学*, 2003, 24(增2): 180-184.
Liu C, Bai S W, Zhao H B. Statistical regularity research of physical and mechanical indexes of clay [J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2003, 24(Sup2): 180-184. (in Chinese)
- [17] 周鑫隆. 基于 Copula 的互相关随机场模拟及土坡可靠度分析 [D]. 武汉: 武汉理工大学, 2020.
Zhou X L. Simulation of cross-correlated random fields and soil slope reliability analysis based on Copula approach [D]. Wuhan: Wuhan University of Technology, 2020. (in Chinese)
- [18] 蒋水华, 李典庆, 周创兵, 等. 考虑自相关函数影响的边坡可靠度分析 [J]. *岩土工程学报*, 2013, 36(3): 508-518.
Jiang S H, Li D Q, Zhou C B, et al. Slope reliability analysis considering effect of autocorrelation functions [J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2013, 36(3): 508-518. (in Chinese)
- [19] 黄振平. 水文统计学 [M]. 南京: 河海大学出版社, 2003.
Huang Z P. Hydrologic statistics [M]. Nanjing: Hohai University Press, 2003. (in Chinese)

(本文编辑: 赵霞)