

DOI:10.13409/j.cnki.jdpme.2020.06.013

孤立波作用下不同长宽比圆端形桥墩受力 数值分析*

沈忠辉, 魏凯, 杨绍林

(西南交通大学土木工程学院桥梁工程系, 四川成都 610031)

摘要:为研究极端波浪灾害对近海铁路桥墩的水动力作用,基于CFD数值软件进行入口边界造波,结合 $k-\omega$ 湍流模型求解RANS方程,采用孤立波模拟极端波浪,建立数值水槽,并利用理论公式验证了数值水槽的可靠性。为探究桥墩长宽比对圆端形桥墩受力的影响,在数值水槽中开展了孤立波作用下不同长宽比(L/D)圆端形桥墩的三维数值模拟,研究了圆端形桥墩长宽比对桥墩周围波浪爬高、流速及桥墩波浪力的影响。研究表明:不同长宽比圆端形桥墩最大波压均发生在静水液面位置;桥墩长宽比对波浪爬高、墩周流场影响明显;圆端形桥墩受到的最大波浪力、墩底最大弯矩随着长宽比的增加而增加,当长宽比较小时,二者呈线性关系。

关键词:孤立波;长宽比;圆端形桥墩;波浪力;数值水槽

中图分类号: TU443 **文献标识码:** A **文章编号:** 1672-2132(2020)06-0945-07

Numerical Analysis of Solitary Wave Loading on Round-ended Piers with Different Length-width Ratios

SHEN Zhonghui, WEI Kai, YANG Shaolin

(Department of Bridge Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)

Abstract: In order to study the hydrodynamic loads of extreme wave hazards on the piers of coastal railway bridges, a numerical wave tank (NWT) was built by adopting the wave inlet boundary via CFD numerical software. The RANS equation of the NWT was solved including $k-\omega$ turbulence model. Solitary wave was generated to simulate the extreme wave. The developed NWT was validated with the theoretical formulas. Three-dimensional numerical simulations of round-ended piers with different length-width ratios under solitary wave were carried out in the NWT to study the effect of the length-width ratio on the wave loading on the round-ended piers. The effects of the length-width ratio on the wave run-up, water particle velocity and wave loading on the pier were investigated. The results showed that: 1) the maximum wave pressure of the round-ended pier always occurs at the static water level regardless of the length-width ratio of the pier; 2) the length-width ratio of the pier affects the wave run-up and water particle velocity significantly; and 3) both maximum wave force and base moment of the pier increase with the length-width ratios, and have a linear relationship when the length-width ratio is small.

Keywords: solitary wave; length-width ratio; round-ended pier; wave force; numerical wave tank

* 收稿日期:2018-12-09;修回日期:2019-03-22

基金项目:国家自然科学基金项目(51708455)资助

作者简介:沈忠辉(1995-),男,硕士研究生。主要从事跨海桥梁方面的研究。Email: zh-shen@my.swjtu.edu.cn

通讯作者:魏凯(1984-),男,副教授,博士。主要从事跨海桥梁方面的研究。Email: kaiwei@home.swjtu.edu.cn

引言

海洋桥梁结构经常遭受海洋极端波浪灾害的作用^[1]。2008年卡特里娜(Katrina)飓风形成的极端波浪灾害造成了美国密西西比河岸大部分桥梁被毁^[2]。近年来,我国高速铁路发展迅速,跨海桥梁将是“21世纪海上丝绸之路”的重要组成部分,因此,研究极端波浪灾害对跨海桥梁的作用规律对跨海铁路桥梁的发展及防灾减灾具有十分重要的意义。

地震引起的海啸以及台风引起的巨浪登陆时,常常形成类似孤立波的强非线性波浪^[3-4]。桥墩在孤立波作用下的受力直接反映了结构抵御极端波浪灾害的能力,所以研究孤立波作用桥墩的水动力效应具有重要的意义,这也使得孤立波成为目前模拟极端波浪灾害的常用手段。吴杰春^[4]采用孤立波模拟极端波浪灾害,对近海桥梁在地震、海啸多灾害作用下的结构性能进行了研究;陆小刚等^[5]对孤立波入射垂直壁进行了数值模拟;蒋昌波等^[6-7]研究了孤立波作用下破碎区单圆柱附近的流体特性及排柱附近的流体特性;W.Mo等^[8]通过试验分别对孤立波与规则波两种情况下圆柱周围流速、动水压强及波浪荷载等进行了分析;S.Han等^[9]估算了垂直结构物(方柱)上孤立波的波压与波高的关系,提出了通过系数使用静水压强估算孤立波波浪力的方法,并与Goda公式^[10]进行了对比。但上述研究大多局限于圆柱、矩形柱、方柱、直强、潜堤等,对跨海桥梁中常见的圆端形桥墩研究甚少,对不同长宽比的圆端形桥墩在孤立波作用下的波浪荷载分析未见报道。

本文通过建立可靠的CFD数值水槽,生成波高为5m的孤立波模拟极端波浪灾害,计算其对圆端直径为2.5m的圆端形桥墩的水动力作用,重点研究孤立波作用下桥墩长宽比对圆端形桥墩受力的影响,得到了圆端形桥墩所受的最大波浪力、墩底最大弯矩等随桥墩长宽比的变化规律。

1 数值方法

1.1 RANS控制方程

在模拟波浪运动时,假设水体为连续不可压缩粘性流体。通过雷诺时均法求解流体连续性方程

和动量守恒方程(RANS方程),得到流体的运动状态,并利用FAVOR技术进行结构物定位识别,VOF方法进行液面追踪,在控制方程中加入面积分数和体积分,得到波浪模型的控制方程如下:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (u_i A_i) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{1}{V_F} \left(u_j A_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + G_i + f_i \quad (2)$$

式中, $i=1,2,3$, x_i 分别表示 x,y,z 坐标; u_i 为流场各方向的时均速度; A_i 为各面流体所占的面积分数; V_F 为流体的体积分,也称孔隙率; t 为时间; p 为压强; ρ 为流体密度; G_i 为各方向的体加速度; f_i 为各方向黏性力引起的加速度:

$$f_i = \frac{1}{V_F} \left[\frac{\tau_{b,i}}{\rho} - \frac{\partial}{\partial x_j} (A_j S_{ij}) \right] \quad (3)$$

$$S_{ij} = -(\nu + \nu_T) \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] \quad (4)$$

式中, $\tau_{b,i}$ 表示各方向的壁面剪切应力; S_{ij} 表示应变率张量; ν 表示动力黏度; ν_T 表示湍流黏度,由湍流模式理论计算得到。

1.2 湍流模型

湍流模型选用 $k-\omega$ 模型^[11],湍流黏度计算如下:

$$\nu_T = k/\omega \quad (5)$$

式中, $\omega = \epsilon/k$, k 和 ω 由下式计算得到:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{1}{V_F} \left(u_i A_i \frac{\partial k}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{V_F} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\nu + \frac{\nu_T}{\sigma_k} \right) A_i \frac{\partial k}{\partial x_i} \right] + \frac{\nu_T}{V_F} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) A_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \beta^* k \omega \quad (6)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{1}{V_F} \left(u_i A_i \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{V_F} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\nu + \frac{\nu_T}{\sigma_\omega} \right) A_i \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right] + \alpha \frac{\omega}{k} \frac{\nu_T}{V_F} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) A_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \beta \omega^2 \quad (7)$$

式(6)中, $\sigma_k = 2.0$, $\beta^* = \beta_0^* f_{\beta^*}$,其中 $\beta_0^* = 0.09$, f_{β^*} 为:

$$\begin{cases} f_{\beta^*} = 1 & \chi_k \leq 0 \\ f_{\beta^*} = \frac{1 + 680\chi_k^2}{1 + 400\chi_k^2} & \chi_k > 0 \end{cases} \quad (8)$$

其中,

$$\chi_k = \frac{1}{\omega^3} \left(\frac{\partial k}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial k}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{\partial k}{\partial z} \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) \quad (9)$$

式(7)中, $\sigma_\omega = 2.0$, $\alpha = 13/25$, $\beta = \beta_0 f_\beta$,其中 $\beta_0 = 9/125$, f_β 为:

$$f_{\beta} = \frac{1 + 70\chi_{\omega}}{1 + 80\chi_{\omega}} \quad (10)$$

其中,

$$\chi_{\omega} = \left| \frac{\Omega_{ij}\Omega_{jk}S_{ki}}{(\beta_0^{\omega})^3} \right| \quad (11)$$

式(11)中,

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (12)$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (13)$$

1.3 孤立波理论

孤立波是椭圆余弦波的一种极端情况,可以直接通过椭圆余弦波理论来求解^[12]。其波面方程为:

$$\eta = H \operatorname{sech}^2 \left[\sqrt{\frac{3H}{4d}} \left(\frac{x}{d} - \frac{ct}{d} \right) \right] \quad (14)$$

$$c = \sqrt{g(d+H)} \quad (15)$$

式中, x 起点在波峰处; H 为孤立波波高; d 为水深; c 为孤立波波速; g 为重力加速度。

孤立波水质点速度按下式进行计算:

$$\frac{u_x}{\sqrt{gd}} = \frac{H}{d} \operatorname{sech}^2 \left[\sqrt{\frac{3H}{4d}} \left(\frac{x}{d} - \frac{ct}{d} \right) \right] \quad (16)$$

$$\frac{u_z}{\sqrt{gd}} = \sqrt{3} \left(\frac{H}{d} \right)^{1.5} \frac{z}{d} \operatorname{sech}^2 \left[\sqrt{\frac{3H}{4d}} \left(\frac{x}{d} - \frac{ct}{d} \right) \right] \tanh \left[\sqrt{\frac{3H}{4d}} \left(\frac{x}{d} - \frac{ct}{d} \right) \right] \quad (17)$$

2 数值水槽建模及验证

根据上述理论,采用CFD分析软件Flow-3D建立如图1所示的三维数值水槽。数值水槽总长150 m,宽为20 m,水深10 m。数值水槽入口边界采用波浪边界,波高5 m,出口边界采用出流边界,两侧采用对称边界,下边界采用墙边界,上边界采用压力边界,设置压强为1个大气压,同时在水槽末端设置长为30 m的消波块,进行适当的消波。

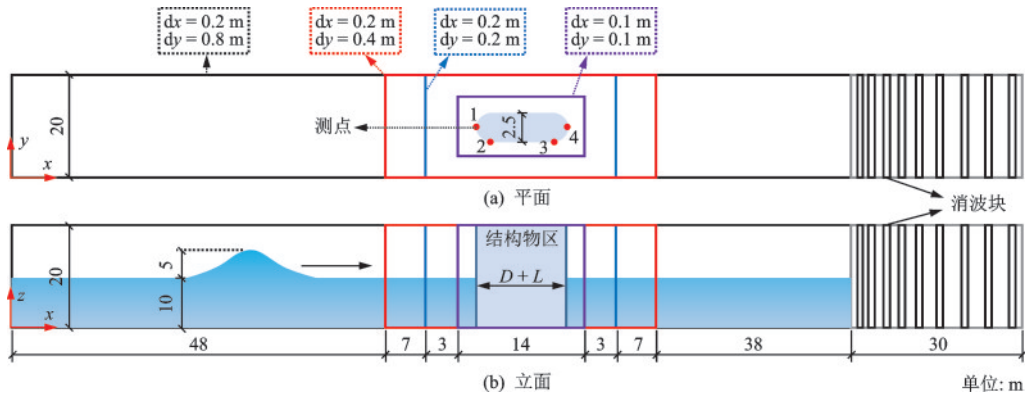


图1 三维数值水槽示意

Fig.1 Schematic diagram of three-dimensional numerical flume

2.1 数值水槽验证

为了验证数值水槽造波的准确性,并进行网格的无关性研究,首先对波浪传播方向网格尺度 $dx=0.1, 0.2, 0.4$ m的数值水槽进行造波,并将波形与理论波形进行对比,对比结果如图2(a)所示。由图可知,采用上述3种网格尺度模拟的孤立波波形均与理论波形吻合良好,波高衰减较小。为了能在后续计算中较好地捕捉桥墩周围的流体运动情况,并考虑计算效率,选择0.2 m作为本文数值水槽沿波浪传播方向的网格尺度(图1),此时水槽总网格数为

380万。图2(b)给出了不同时刻,水槽内液面的波动情况。由图可知,数值波形传播稳定及孤立波造波时伴随的小尾波幅度较小,说明本文数值模型准确度较高,满足试验研究要求。

3 数值水槽试验工况

将表1所示的不同长宽比(长度方向变化)的圆端形桥墩置于水槽中部,各圆端形桥墩前方端点距水槽入口边界60 m。为保障计算模型具有相同阻水面积,圆端形桥墩圆端直径 D 保持2.5 m不变。

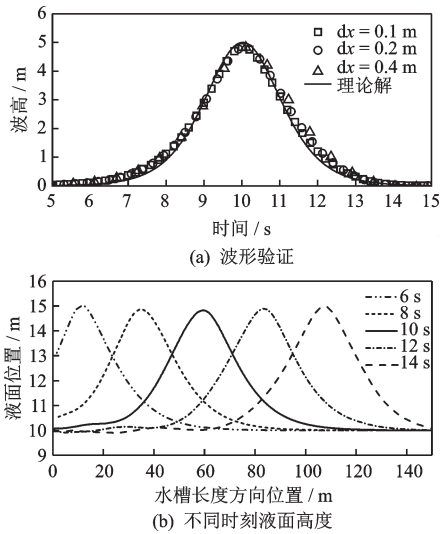


图2 三维水槽数值造波验证
Fig.2 Validation of wave making performance of the numerical wave tank

为研究流体发展规律,在桥墩周围布置如图1(a)所示的压力、流速测点:前端(编号为1)、前半圆端(编号为2)、后半圆端(编号为3)、后端(编号为4)。下文将用1,2,3,4表示上述4个位置。测点从水槽底到结构物顶都有布置。为研究桥墩受力,波浪力监测体布置在如图3所示的3个区域,测量监测体包围的结构物表面所受的波浪力,并分别用A,B,C表示。

表1 试验工况
Table 1 Test condition

工况示意	长宽比(L/D)							
	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	10

注:L/D=0为圆形

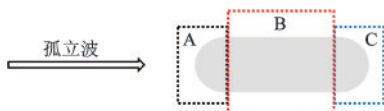


图3 力监测区域
Fig.3 Force monitoring area

4 计算结果与讨论

4.1 最大波压

孤立波与圆端形桥墩相互作用时,水体爬高和动水压强决定了桥墩受到的荷载^[6],所以确定桥墩前端波浪爬高和最大压强(波压)的分布规律具有

重要的意义。Goda压强计算公式^[10]是用于如防波堤等垂直结构设计的著名公式。为了对比,首先根据Goda公式^[10]计算了算例桥墩的最大波压分布,其表达式:

$$p_1 = \frac{1}{2} (1 + \cos\beta) (\alpha_1 + \alpha_2 \cos^2\beta) \rho g H \quad (18)$$

$$p_2 = \frac{p_1}{\cosh 2\pi h/L} \quad (19)$$

式中, β 是波前进方向与垂直结构物之间的夹角; α_1, α_2 为压力分布系数; H 为入射波波高; p_1, p_2 分别为水表面、底部的压强。

其中,

$$\alpha_1 = 0.6 + \frac{1}{2} \left[\frac{4\pi h/L}{\sinh(4\pi h/L)} \right]^2 \quad (20)$$

$$\alpha_2 = \min \left\{ \frac{h_b - d}{3h_b} \left(\frac{H_{\max}}{d} \right)^2, \frac{2d}{H_{\max}} \right\} \quad (21)$$

式中, h_b 为向海侧 $5H_{1/3}$ 处的水深; d 为桥墩碎石堆处的水深; H_{\max} 为不规则波列中的最大波高。

由于算例没有考虑碎石堆,故 $d=0$ 。因为桥墩为竖直,结构物表面法向与来波方向的夹角 $\beta=0^\circ$ 。同时,孤立波波长可以认为无穷大,所以 $\alpha_1=0.6, \alpha_2=0$,故: $p_1=1.1\rho g H, p_2=p_1$,波浪爬高为^[9]: $\eta^*=1.5H_{\max}$ 。将数值计算得到的桥墩前端最大波压与Goda公式结果进行对比,如图4所示。

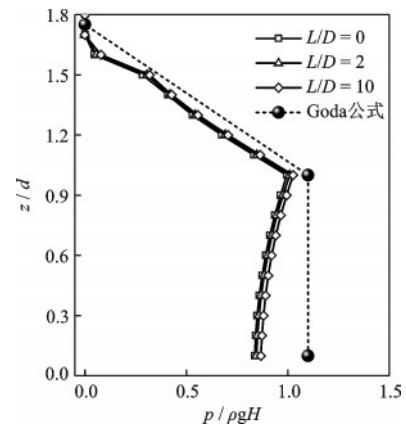


图4 不同长宽比圆端形桥墩前端最大波压分布

Fig.4 Maximum wave pressure distribution at front end of the round-ended piers with different length-width ratios

由图4知,不同长宽比的圆端形桥墩最大波压均发生在静水液面位置。由其分布可知,墩前最大爬高与Goda公式的最大爬高相似,但液面波压最大值为 $1.0\rho g H$ 小于Goda公式($1.1\rho g H$),即小于孤立波作用直墙结构的最大压强,并且从墩底到液面

呈非线性增加。

4.2 长宽比对桥墩波浪力的影响

图5为孤立波作用下不同长宽比圆端形桥墩受到的沿波浪传播方向的波浪力。显然,桥墩长宽比的改变影响了桥墩周围流体波动的相位、爬高及流场,造成了波浪力明显不同。

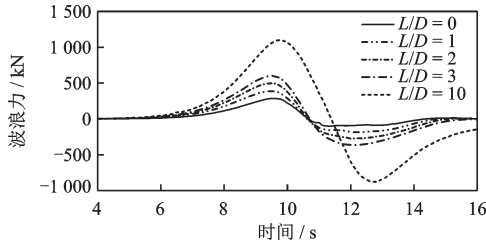


图5 不同长宽比的圆端形桥墩受到的波浪力时程曲线
Fig.5 Time history of wave force of the round-ended piers with the different length-width ratios

为进一步探究圆端形桥墩长度影响桥墩受力的原因,根据流体监测数据从机理上分析了长宽比对桥墩受力的影响。孤立波与圆端形桥墩相互作用,各时刻受到的波浪力为结构物表面受力的矢量和,由于 F_B 较小,可忽略不计,故 $F = F_A + F_C$ (其中 F_C 为负,表示力的方向与波浪传播方向相反)。图6给出了不同长宽比桥墩 F_A 和 F_C 的历时曲线。

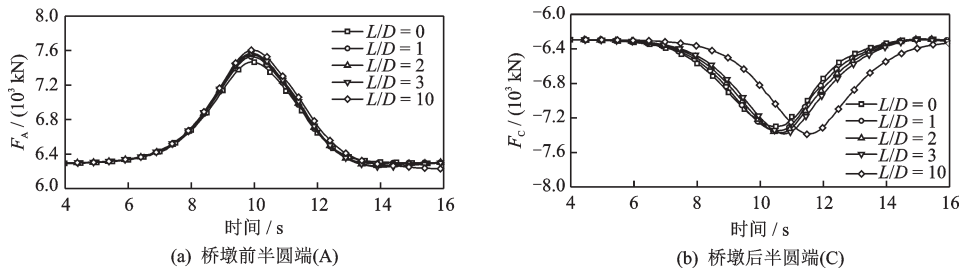


图6 力监测区域(A、C)在波浪作用时的波浪力时程曲线
Fig.6 Time history of wave force at the force monitoring area (Zone A and C)

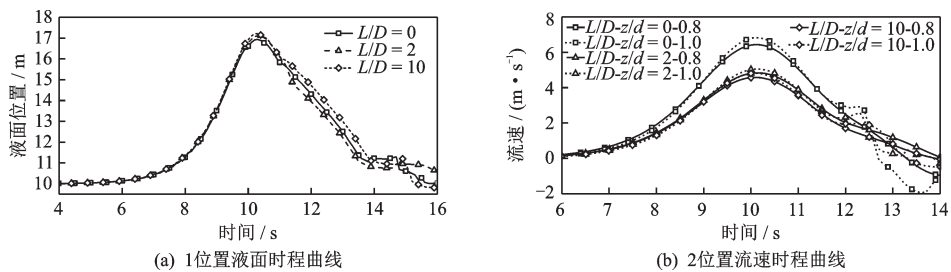


图7 不同长宽比圆端形桥墩前侧(1,2位置)的液面、流速时程曲线

Fig.7 Time history of water level and velocity in front of the round-ended piers with different length-width ratios

由图6(a)可知,前端置于同一位置的桥墩,前侧流体质点波动相位相同,同时, F_A 随着桥墩长度的增加而增加,说明桥墩长度的增加改变了前侧流体运动的形态。由图6(b)知,后端置于不同位置的桥墩,由于流体质点波动相位不同, F_C 存在明显的相位差异,但 $F_{C\min}$ 随着长度的增加而降低。

图7和图8分别给出了不同长宽比圆端形桥墩前、后侧的液面、流速时程。其中,图7(a)给出了1位置的液面时程,图7(b)给出了2位置 $z/d = \{0.8, 1.0\}$ 处流速的变化情况;图8(a)给出了4位置液面时程,图8(b)给出了3位置 $z/d = \{0.8, 1.0\}$ 处流速的变化情况。同时,图9还给出了桥墩周围液面位置波压的变化情况。由图7可知,长度增加,前侧流速降低,爬高增大。由于较大的流速主要集中在圆端处,同时圆端处流速降低,易造成水体堆积,爬高增加,致A域内波浪爬高增加引起的静压变化较流速引起的动压变化显著,导致桥墩前侧压强增加,所以 F_A 增大。由图8可知,随着长度的增加,后侧最大爬高增加,最大流速先减小后增加,并随着长宽比的增大,增长减缓。由上分析可知,当 L/D 较小时,后侧最大爬高增加及最大流速降低,流速降低,吸力减小,后侧的最大压强增加,故 $F_{C\min}$ 减小;当 L/D 较大时,最大流速增长较缓,变化不显著,但最大爬高增加,致后侧最大压强增大,故 $F_{C\min}$ 减小。

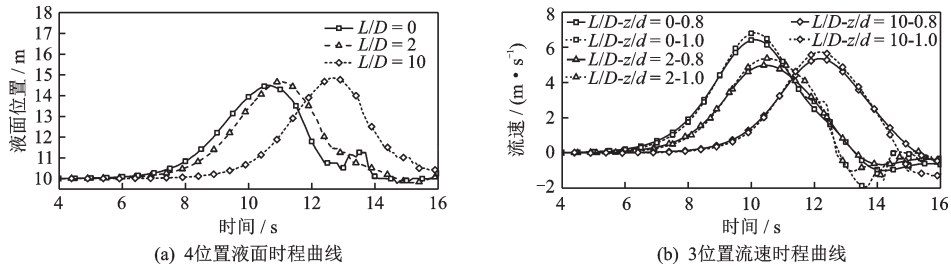


图8 不同长宽比圆端形桥墩后侧(3,4位置)的液面、流速时程曲线

Fig.8 Time history of water level and velocity in back of the round-ended piers with different length-width ratios

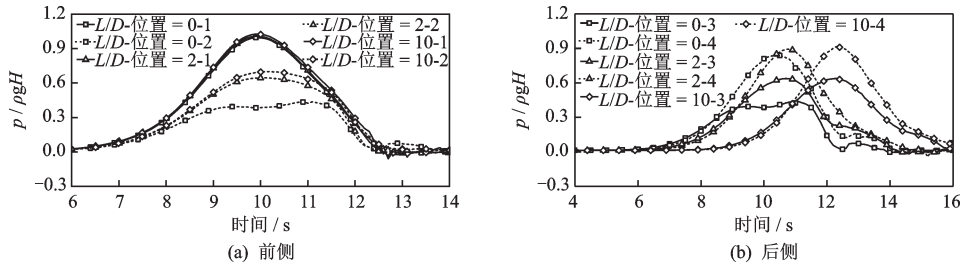


图9 桥墩周围液面位置的波压时程曲线

Fig.9 Time history of wave pressure at the initial water level around the piers

4.3 最大波浪力与最大墩底弯矩

在实际工程应用中,我们更关心桥墩受到的最大波浪力和墩底最大弯矩。图10给出了不同长宽比圆端形桥墩受到的最大波浪力及墩底最大弯矩。由图可知,桥墩受到的最大波浪力及墩底最大弯矩随长宽比的增加而增加,并且在 $L/D > 3$ 时呈现线性关系。

由上述分析可知,孤立波引起的静压是波浪荷

载的主要成分。当 L/D 较小时,圆端形桥墩前后侧的相位差,造成的前后侧液面差异变化近似为线性的,但一个孤立波的波面变化是非线性的,当 L/D 较大时;桥墩长宽比的改变引起的前后侧液面差异的变化减缓,故波浪力的增幅变缓。考虑到实际桥梁常用的桥墩长宽比较小,所以圆端形桥墩受到的最大波浪力与墩底最大弯矩与长宽比的关系可按线性处理。

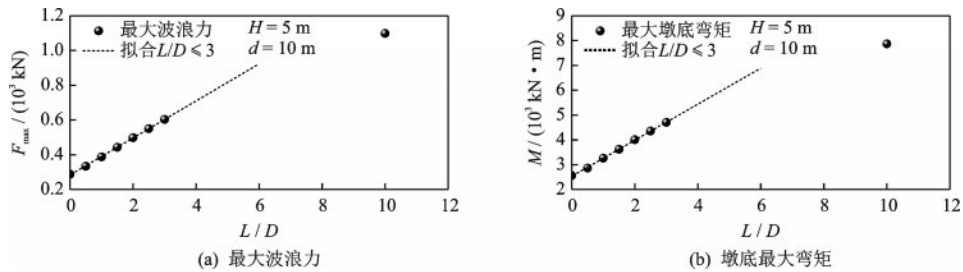


图10 不同长宽比圆端形桥墩受到的最大波浪力和墩底最大弯矩

Fig.10 The maximum wave force and the maximum base moment of the round-ended piers as a function of length-width ratios

5 结论

通过建立CFD数值水槽,开展了孤立波作用下不同长宽比圆墩形桥墩的水动力分析。从圆端形桥墩前端最大波压分布、波浪爬高、流场变化规律、等方面详细讨论了桥墩长宽比的影响。得到的主要结论如下:

(1) 本文建立的数值孤立波水槽造波稳定,精度较高,可以满足数值试验要求,对桥墩极端波浪作用数值分析具有参考意义。

(2) 不同长宽比圆端形桥墩最大波压均发生在静水液面位置。

(3) 随着圆端形桥墩长宽比增加,桥墩前侧波浪爬高增加,流速降低,后侧波浪最大爬高增加,最大流速先降低后略有增加。

(4) 圆端形桥墩受到的最大波浪力、墩底最大弯矩随着长宽比的增加而增加。当长宽比较小时桥墩最大波浪力、墩底最大弯矩随长宽比增加线性增大。

本文探究了孤立波下,圆端形桥墩长宽比对桥墩波浪荷载的影响,但对于其他波浪条件下本文的结论是否能够推广,还有待进一步验证。

参考文献:

- [1] 张家瑞,魏凯,秦顺全. 基于贝叶斯更新的深水桥墩波浪动力响应概率模型[J]. 工程力学, 2018, 35(8): 138-171.
Zhang J R, Wei K, Qin Sh Q. An Bayesian updating based probabilistic model for the dynamic response of deepwater bridge piers under wave loading [J]. Engineering Mechanics, 2018, 35(8): 138-171. (in Chinese)
- [2] Okeil A M, Cai C S. Survey of short and medium-span bridge damage induced by hurricane katrina[J]. Journal of Bridge Engineering, 2008, 13(4): 377-387.
- [3] 姚建喜,吴静萍. 孤立波数值造波研究[J]. 武汉理工大学学报(交通科学与工程版), 2017, 41(4): 604-608.
Yao J X, Wu J P. A study on numerical generation of solitary wave[J]. Journal of Wuhan University of Technology (Transportation Science & Engineering), 2017, 41(4): 604-608. (in Chinese)
- [4] 吴杰春. 桥梁在地震海啸多灾害作用下的结构性能研究[D]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学, 2016.
Wu J Ch. Study on structural performance of coastal bridges under multiple hazards of earthquake and tsunami [D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2016. (in Chinese)
- [5] 陆小刚,陈材侃. 孤立波入射垂直壁数值模拟及壁面波浪荷载分析[J]. 工程力学, 1992, 9(4): 113-122.

Lu X G, Chen C K. Numerical simulation of run-up of a solitary wave on a vertical wall and pressure distribution on the wall [J]. Engineering Mechanics, 1992, 9(4): 113-122. (in Chinese)

- [6] 蒋昌波,刘晓建,姚宇,等. 孤立波作用下破碎区单圆柱附近流动特性数值研究[J]. 水动力学研究与进展, 2016, 31(4): 472-479.
Jiang Ch B, Liu X J, Yao Y, et al. Numerical study of the flow characteristics around a single pile in the surf zone under solitary waves [J]. Journal of Hydrodynamics, 2016, 31(4): 472-479. (in Chinese)
- [7] 蒋昌波,邓涯,姚宇,等. 孤立波作用下排柱附近流动特性数值分析[J]. 浙江大学学报(工学版), 2015, 49(8): 1441-1447.
Jiang Ch B, Deng Y, Yao Y, et al. Numerical analysis of the flow characteristics around piles under solitary waves [J]. Journal of Zhejiang University (Engineering Science), 2015, 49(8): 1441-1447. (in Chinese)
- [8] Mo W, Irschik K, Oumeraci H, et al. A 3D numerical model for computing non-breaking wave forces on slender piles [J]. Journal of Engineering Mathematics, 2007, 58(1-4): 19-30.
- [9] Han S, Ha T, Cho Y-S. Laboratory experiments on run-up and force of solitary waves [J]. Journal of Hydro-environment Research, 2015, 9(4): 582-591.
- [10] Goda Y. Random seas and design of maritime structures [M]. Tokyo: University of Tokyo Press, 1985.
- [11] Wilcox D C. Turbulence modeling for CFD [M]. [S.l.]: DGW Industries, 2006.
- [12] 王树青,梁丙臣. 海洋工程波浪力学 [M]. 青岛: 中国海洋大学出版社, 2013.
Wang Sh Q, Liang B Ch. Wave mechanics for ocean engineering [M]. Qingdao: Ocean University of China, 2013. (in Chinese)

(本文责编:赵霞)