

DOI:10.13409/j.cnki.jdpme.20220402003

考虑惯性耦合的两相介质动力反应显式数值计算方法*

徐静茹¹, 李亮¹, 宋佳²

(1. 北京工业大学城市安全与灾害工程教育部重点实验室, 北京 100124; 2. 北方工业大学土木工程学院, 北京 100144)

摘要: 基于包含惯性耦合(耦合质量密度系数)的 $u-p$ 形式饱和两相介质弹性波动方程, 开展了对饱和两相介质近场波动问题时域全显式数值计算方法的研究。通过对波动方程中的质量集中矩阵和流体压缩矩阵对角化处理, 消除了方程中的动力耦联的影响。分别应用中心差分法和 Newmark 常平均加速度法求解固相位移和固相速度, 基于向后差分法求解孔隙流体压力, 建立了考虑惯性耦合的饱和两相介质的时域显式数值计算方法。将该方法的数值解与相应的解析解进行对比, 二者符合良好, 验证了该方法的正确性。将该方法应用于饱和两相介质自由场的地震反应问题, 研究了惯性耦合对两相介质动力反应的影响。基于本文研究的两种情况表明, 惯性耦合对饱和两相介质动力反应的影响程度有限。

关键词: 饱和两相介质; 动力反应; 时域全显式数值算法; 惯性耦合; $u-p$ 形式波动方程

中图分类号: TU435 **文献标识码:** A **文章编号:** 1672-2132(2023)05-1009-07

Time-domain Full Explicit Numerical Algorithm of Fluid-saturated Porous Media Considering Inertial Coupling

XU Jingru¹, LI Liang¹, SONG Jia²

(1. Key Laboratory of Urban Security and Disaster Engineering, Beijing University of Technology, Ministry of Education, Beijing 100124, China; 2. School of Civil Engineering, North China University of Technology, Beijing 100144, China)

Abstract: Based on the $u-p$ dynamic formulation of saturated two-phase media with considering inertial coupling (coupled mass density), the fully explicit algorithm in time domain for the near-field wave problem of fluid-saturated porous media is studied. The dynamic coupling in the equation is eliminated by diagonalizing the mass matrix and fluid compression matrix in the equation. The center difference method and Newmark constant average acceleration method are used to solve the solid phase displacement and velocity respectively, and the backward difference method is used to solve the fluid pressure. The numerical solution of the proposed method is compared with the analytical solution, with a strong agreement confirming the accuracy of the method employed. The method is applied to the seismic response of free field in saturated two-phase media and analyze the influence of inertial coupling on the dynamic response of two-phase media. Based on the two cases studied in this paper, the results

* 收稿日期: 2022-04-02; 修回日期: 2022-05-09

基金项目: 国家自然科学基金项目(51808006)资助

作者简介: 徐静茹(1996—), 女, 硕士。主要从事土动力学数值计算方法方面的研究。E-mail: xujr@bjut.edu.cn

show that the effect of inertial coupling on the dynamic reaction of fluid-saturated porous media is limited.

Keywords: fluid-saturated porous media; dynamic response; fully explicit algorithm intime domain; inertial coupling; u - p dynamic formulation

0 引言

饱和土场地中波的传播及场地动力反应是土动力学和岩土地震工程领域中较为重要的研究课题之一。上述问题可归结为饱和两相介质中的近场波动问题。该问题的研究始于M.A.Biot^[1],他首先建立了以固相位移 u 和液相位移 U 为基本未知量的 u - U 形式波动方程。此后,学者们给出了不同形式的波动方程,其中以固相位移 u 和液相压力 p 为基本未知量的 u - p 形式方程^[2]应用最为广泛。 u - p 形式方程相较 u - U 形式方程略去了固液相对加速度,更适用于描述包括地震相应在内的低频动力问题,且该方程矢量未知量和标量混合形式,对于求解节点和单元数目庞大的复杂动力问题,可大大缩减求解的动力自由度的数目,简化计算;同时,通过该方程可直接求得许多土动力学问题(如液化判别)重点关注的液相压力 p 。

饱和两相介质的波动问题可应用解析方法或数值方法进行求解。解析法仅能应用于求解形状规则、荷载形式及边界条件简单的问题,其使用范围有限。大多数两相介质的波动问题需应用数值方法进行求解。针对 u - p 形式波动方程的数值解法以有限元方法为主;基本模式为交替求解,即在一个时间分步上采用不同的计算模式分别计算 u 、 p 。

根据求解模式的特点,交替解法可以分为隐式方法(全隐式方法)、显式方法(全显式方法)和二者相结合的显-隐式方法。K.C.Park^[3]、O.C.Zienkiewicz等^[4]分别建立了 u - p 波动方程的隐式积分算法。该算法具有良好的稳定性,但由于在计算时间的每一步都需要求解耦合方程,因此在自由度较大的动态问题的计算效率上存在一些问题。 u - p 波动方程的显-隐式方法由O.C.Zienkiewicz等^[5-6]建立,由于显式计算模式的引入,计算效率可以在一定程度上得到提高。对于自由度数目较多的复杂问题,全显式方法仍是更好的选择。段雪铭等^[7]采用精细时程积分法求解 u - p 形式波动方程中的固相位移 u ,向后差分法计算孔隙流体压力 p 。交替迭代求解的计算

方法避免了在每个时间步上求解耦合方程组。宋佳等^[8-9]通过对固体质量矩阵和流体压缩矩阵进行对角化处理,提出了一种更高精度的显式算法。李亮等^[10]基于 u - p 形式波动方程,开展全显式数值计算方法及其算法应用、算法特性的研究。

在Biot建立的两相介质波动方程中,包含了固相与液相的惯性耦合(ρ_a)。但是由于该物理量的数值难以确定,在大多数研究者的研究中,均直接略去该项。赵成刚等^[11]基于包含耦合质量密度 ρ_a 项的完整形式 u - U 波动方程,建立了两相介质动力反应的时域显式数值算法,并研究了耦合质量密度 ρ_a 对固相和液相动位移的影响。结果显示耦合质量密度 ρ_a 对固相位移影响很小,而对液相初始阶段的位移影响较大,这可引起孔隙压力的变化。

总体而言,惯性耦合对两相介质动力反应的影响还不是非常明确,存在进一步研究的空间。本文将基于 u - p 形式波动方程,建立考虑惯性耦合的饱和两相介质近场波动问题时域全显式数值计算方法,并将该方法与透射人工边界相结合^[12],研究惯性耦合对两相介质动力反应的影响。

1 方程建立

1.1 包含耦合质量密度的两相介质波动方程

考虑固液项之间惯性耦合作用,并以固相位移 u 和孔隙流体压力 p 作为基本质量的 u - p 形式饱和两相介质弹性波动方程,式(1)表征饱和两相介质的总体动量平衡,式(2)为孔隙流体流动的守恒方程。

$$L^T D L u - L^T m p = \rho \ddot{u} \quad (1)$$

$$m^T L \dot{u} + \nabla^T \bar{k} \nabla p - m^T L \dot{u} \bar{k} \left(\rho_f - \frac{1}{n} \rho_a \right) = \frac{1}{Q_b} \dot{p} \quad (2)$$

式中, u 、 \dot{u} 和 \ddot{u} 分别为固相的位移、速度和加速度向量,对于二维波动问题, $u = \{u_x, u_y\}^T$, $\dot{u} = \{\dot{u}_x, \dot{u}_y\}^T$, $\ddot{u} = \{\ddot{u}_x, \ddot{u}_y\}^T$; ρ_s 为固相质量密度; ρ_f 为液相质量密度; ρ_a 为耦合质量密度,表征固相与液相之间的耦合; n 为孔隙率; k_f 为渗透系数; μ_f 和 E_w

分别为孔隙流体的黏滞系数和体积压缩模量; D 为波动方程的系数矩阵, 对于二维波动问题, 其表达式为:

$$D = \begin{bmatrix} \lambda + 2G & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \quad (3)$$

式中, λ 和 G 分别为固相的 Lamé 常数和剪切模量。

梯度算子向量 ∇ 、微分算子矩阵 L 和 m 的表达式分别为:

$$\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}^T \quad (4)$$

$$m = \{1 \ 1 \ 0\}^T \quad (5)$$

$$L = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}^T \quad (6)$$

应用伽辽金法^[13]对波动方程式(1)和式(2)进行有限元空间离散, 得到其伽辽金弱式为:

$$M_1 \ddot{u} + Ku - Qp = f_u \quad (7)$$

$$M_2 \ddot{u} + Q^T \dot{u} + Jp + S\dot{p} = f_p \quad (8)$$

式中, M_1 、 M_2 为质量矩阵, 其中 M_2 包含耦合质量密度; K 为刚度矩阵; Q 为固相与孔隙流体动力响应的耦合矩阵; J 为孔隙流体的渗流矩阵; S 为孔隙流体的压缩矩阵; f_u 和 f_p 分别为作用在固相与孔隙流体上的边界荷载向量。

方程(7)和(8)中各个矩阵和向量的表达式为:

$$M_1 = \sum_e \iint_{\Omega} \rho N_u N_u d\Omega \quad (9)$$

$$M_2 = \sum_e \iint_{\Omega} \bar{k} \left[\rho_f - \frac{1}{n} \rho_a \right] (\nabla N_p)^T N_u d\Omega \quad (10)$$

$$K = \sum_e \iint_{\Omega} N_u^T L^T D L N_u d\Omega \quad (11)$$

$$Q = \sum_e \iint_{\Omega} (L N_u)^T m N_p d\Omega \quad (12)$$

$$J = \bar{k} \sum_e \iint_{\Omega} (\nabla N_p)^T \nabla N_p d\Omega \quad (13)$$

$$S = \frac{1}{Q_b} \sum_e \iint_{\Omega} N_p N_p d\Omega \quad (14)$$

$$f_u = \sum_e \oint_{\Gamma} N_u N_u \{f_{ue}\} d\Gamma \quad (15)$$

$$f_p = \sum_e \oint_{\Gamma} N_p N_p \{f_{pe}\} d\Gamma \quad (16)$$

经有限元空间离散后得到的波动方程(7)和(8)为具有动力耦合的耦合方程组。

1.2 两相介质动力反应的时域显式逐步计算列式

对质量矩阵 M_1 和孔隙流体压缩矩阵 S 进行对角化^[8]处理后, 基于矩阵对角化后的饱和两相介质波动方程组, 推导出饱和两相介质动力响应的时域显式逐步计算列式。

计算时刻为 t_k 时对应的波动方程组可以表示为:

$$M_{1l} \ddot{u}_k + K u_k - Q p_k = f_{uk} \quad (17)$$

$$M_2 \ddot{u}_k + Q^T \dot{u}_k + J p_k + S_l \dot{p}_k = f_{pk} \quad (18)$$

式中, M_{1l} 为对角化后的整体质量矩阵; S_l 为对角化后流体压缩矩阵。

基于中心差分法, t_k 时刻的固相加速度的计算式为:

$$\ddot{u}_k = \frac{2}{\Delta t^2} (u_{k+1} - u_k) - \frac{2}{\Delta t} \dot{u}_k \quad (19)$$

将式(19)代入式(17), 得到 t_{k+1} 时刻的固相位移计算式为:

$$u_{k+1} = M_{1l}^{-1} (f_{uk} - K u_k + Q p_k) \frac{\Delta t^2}{2} + \Delta t \dot{u}_k + u_k \quad (20)$$

假定在时间步长 Δt 的范围内, 流体压力 p 为线性变化, 其对时间的变化率(导数)可以用有限差分的形式近似表示。采用向后差分法, 即

$$\dot{p}_k = \frac{p_{k+1} - p_k}{\Delta t} \quad (21)$$

将式(21)代入式(18), 可得:

$$p_{k+1} = \Delta t S_l^{-1} (f_p - J p_k - Q^T \dot{u}_k - M_2 \ddot{u}_k) + p_k \quad (22)$$

再将式(19)代入式(18), 得到 t_{k+1} 时刻的孔隙流体压力计算式为:

$$p_{k+1} = \Delta t S_l^{-1} \left(f_p - J p_k - Q^T \dot{u}_k - M_2 \left[\frac{2}{\Delta t^2} (u_{k+1} - u_k) - \frac{2}{\Delta t} \dot{u}_k \right] \right) + p_k \quad (23)$$

计算时刻为 t_{k+1} 时, 方程(7)可写为如下形式:

$$M_{1l} \ddot{u}_{k+1} + K u_{k+1} - Q p_{k+1} = f_{uk+1} \quad (24)$$

将式(21)与式(28)进行叠加可得:

$$M_{1l} (\ddot{u}_k + \ddot{u}_{k+1}) + K (u_k + u_{k+1}) + Q (p_k + p_{k+1}) = f_{uk} + f_{uk+1} \quad (25)$$

引入 Newmark 常平均加速度法:

$$\frac{\ddot{u}_{k+1} + \ddot{u}_k}{2} = \frac{\dot{u}_{k+1} - \dot{u}_k}{\Delta t} \quad (26)$$

将式(26)代入式(25), 得到 t_{k+1} 时刻的固相速度计算式为:

$$\dot{u}_{k+1} = \dot{u}_k + \frac{\Delta t}{2} M_{1l}^{-1} [(f_{uk} + f_{uk+1}) - K (u_k + u_{k+1}) + Q (p_k + p_{k+1})] \quad (27)$$

式(20)、(23)、(27)共同组成了本文算法的时域显式逐步计算列式。该组列式基本计算模式是按照时间顺序迭代计算,得到两相介质动力反应时程的计算结果。此外该算法包含了耦合质量密度 ρ_a ,因此该算法能够考虑惯性耦合对饱和两相介质动力反应的影响。

1.3 算法验证

该算例为一维饱和土柱在表面均布荷载作用下的动力反应。场地顶面施加均布的动力荷载(阶跃荷载和正弦荷载),荷载时程分别如图1和图2所示。土柱的尺寸为3 m×200 m。土柱左右两侧设置不透水边界并限制其水平方向位移;上表面为自由透水边界;底部设置不透水边界,计算模型如图3所示。

B.R.Simon等^[14]给出了该问题中动力反应时程的解析解,该解析解是以无量纲的形式给出的。应用本文建立的算法得到在阶跃荷载和正弦荷载作用下饱和土柱上表面固相位移时程的数值解,并与相应的解析解进行对比。土柱的其他各项材料参数见表1,其中各项参数均已无量纲化。

阶跃荷载和正弦荷载作用下,得到的土柱上表面固相位移时程的数值解与解析解比较如图4和图5所示。

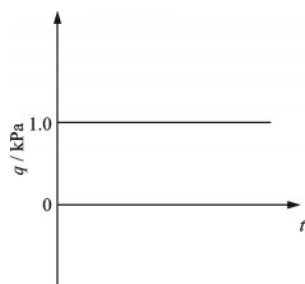


图1 阶跃荷载时程

Fig.1 Time history of step load

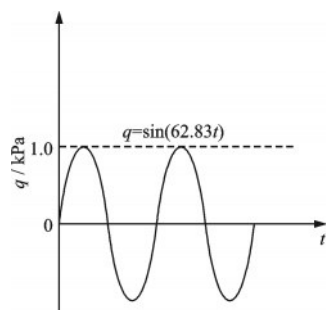


图2 正弦荷载时程

Fig.2 Time history of sine load

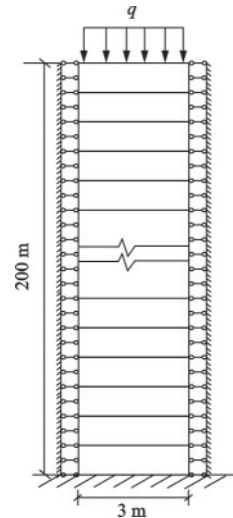


图3 计算模型

Fig.3 Calculation model

表1 无量纲饱和土柱材料参数

Table 1 Non-dimensional material parameters of saturated soil column

ρ^*	ρ_f^*	n^*	λ^*	G^*	k^*	K_s^*	K_f^*	α^*	
0.306	0.297	7	0.333	833.3	1 250	0.004 883	∞	39 990	1.0

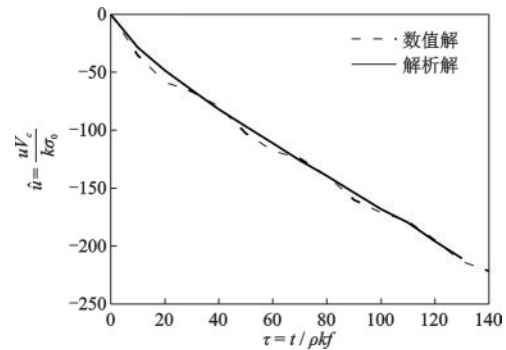


图4 阶跃荷载作用饱和土柱上表面固相位移时程对比

Fig.4 Comparison of solid-phase displacement time history of top surface of saturated soil column under step load

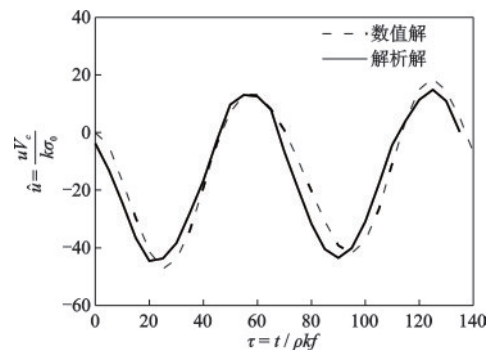


图5 正弦荷载作用下饱和土柱上表面固相位移时程对比

Fig.5 Comparison of solid-phase displacement time history of top surface of saturated soil column under sine load

由图4、图5可知,应用本文算法得到的饱和土柱动力反应的数值解结果与相应的解析解结果符合较好,表明本文算法能够对饱和和两相介质的动力反应进行较为准确的计算,验证了本文算法的正确性。

2 惯性耦合对两相介质动力响应影响

以饱和两相介质自由场的地震反应为例,计算模型如图6所示。计算区域尺寸取80 m×80 m,采用四节点矩形单元进行有限元离散,单元尺寸取4 m×4 m。计算区域上表面设置为自由排水边界,左右两侧边界和底部边界采用透射人工边界方法进行处理^[15]。令地震波从计算区域的底部边界垂直入射。

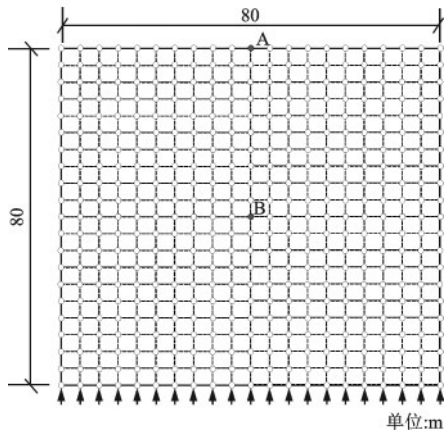


图6 饱和两相介质自由场地震响应计算模型

Fig.6 Seismic response calculation model of free field of fluid-saturated porous media

以天津宁河地震记录作为输入地震动,该地震记录的持续时长为19.2 s,其位移时程和速度时程如图7所示。取计算区域上表面中间节点A和模型深度中点位置的中间节点B为计算节点。计算的时间步长为0.000 1 s,计算输入饱和和两相介质的材料参数见表2。

为研究惯性耦合对饱和两相介质动力反应的影响,令耦合质量密度 ρ_a 取不同值,比较动力反应计算结果的差异。本文研究两种情况:(1) $\rho_a=0 \text{ kg/m}^3$;(2) ρ_a 取不为0的特殊值,具体参照1980年J.G.Berryman^[15]提出的如下公式:

$$\rho_a = n(\hat{a} - 1)\rho_f \quad (28)$$

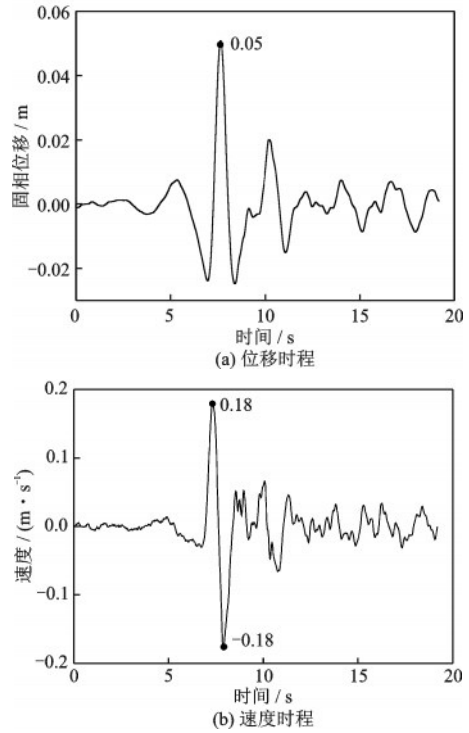


图7 天津宁河地震记录

Fig.7 Record of Tianjin Ninghe earthquake

表2 饱和两相介质材料参数

Table 2 Material parameters of fluid-saturated porous media

E_s/Pa	K_f/Pa	K_s/Pa	$\rho_f/(\text{kg}\cdot\text{m}^{-3})$	$\rho_s/(\text{kg}\cdot\text{m}^{-3})$	$k/(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$	ν	n
3×10^7	1×10^9	1×10^{11}	1 000	2 000	1×10^{-2}	0.2	0.3

式中, \hat{a} 为弯曲系数, $\hat{a} = 1 + \hat{r}(\frac{1-n}{n})$; \hat{r} 为固体颗粒的初始状态系数。

由式(28)计算得 $\rho_a=300 \text{ kg/m}^3$ 。

脉冲荷载以P波形式入射时,计算结果如图8所示。

当脉冲荷载以S波形式入射时,计算结果如图9所示。

分别将图7与图8、图9对比可知:当脉冲荷载以P波形式入射,相较于忽略耦合质量密度($\rho_a=0 \text{ kg/m}^3$)的情况,考虑耦合质量密度,即耦合质量密度不为0时,固相动力反应的幅值略有增大,固相位移峰值增大约10%,固相速度峰值增大约19%,而孔隙流体压力峰值略有减小,减小了16%;当脉冲荷载以S波形式入射,是否考虑耦合质量密度两种情况,对饱和两相介质的动力反应影响较小。总体而言,本文研究的两种情况下,惯性耦合对饱和两相介质动力反应的影响程度有限。

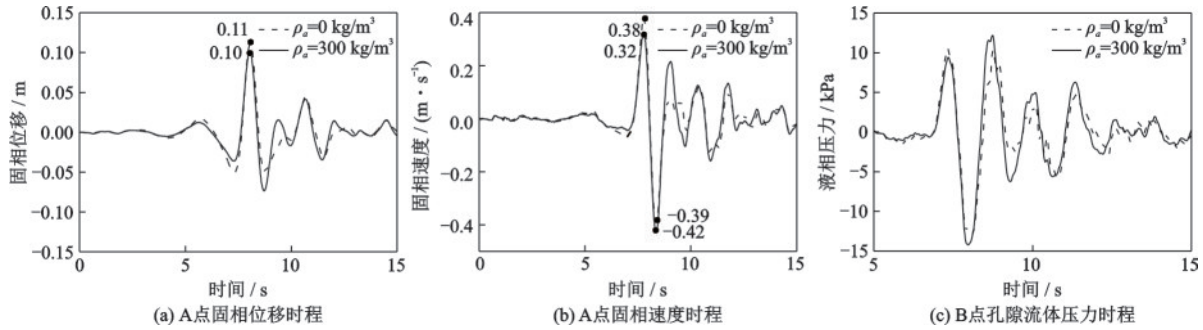


图8 P波入射时饱和两相介质地震响应计算结果

Fig. 8 Seismic response of fluid-saturated media under P wave incidence

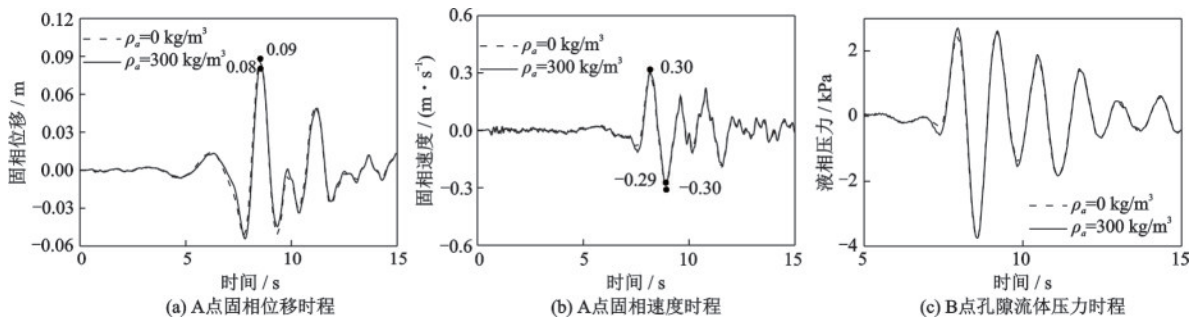


图9 S波入射时饱和两相介质地震响应计算结果

Fig. 9 Seismic response of fluid-saturated media under S wave incidence

3 结 语

本文基于包含耦合质量密度的 u - p 形式的饱和两相介质波动方程,建立了考虑惯性耦合的两相介质近场波动问题时域全显式数值计算方法。分别应用中心差分法和 Newmark 常平均加速度法求解固相位移和速度,基于向后差分法求解流体压力,建立了考虑惯性耦合的饱和两相介质的时域显式数值计算方法。将该方法的数值解与相应的解析解进行对比,验证了该方法的正确性。

将该方法应用于饱和两相介质自由场的地震反应问题,研究了基于透水边界条件下惯性耦合对两相介质动力反应的影响,即惯性耦合对于饱和两相介质地震响应问题的计算研究影响较小,在计算时可以忽略。

参考文献:

[1] Biot M A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid [J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 1956, 28(2): 168-191.
 [2] Zienkiewicz O C, Chang C T, Bettess P. Drained, und-

rained, consolidating and dynamic behaviour assumptions in soils[J]. Geotechnique, 1980, 30(4): 385-395.

[3] Park K C. Stabilization of partitioned solution procedure for pore fluid-soil interaction analysis [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1983, 19(11): 1669-1673.
 [4] Zienkiewicz O C, Paul D K, Chan A H C. Unconditionally stable staggered solution procedure for soil-pore fluid interaction problems [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1988, 26 (5) : 1039-1055.
 [5] Zienkiewicz O C, Huang M S, Wu J, et al. A new algorithm for the coupled soil-pore fluid problem [J]. Shock and Vibration, 1993, 1(1): 3-14.
 [6] Zienkiewicz O C, Huang M S, Pastor M. Computational soil dynamics-A new algorithm for drained and undrained conditions [C]//Proceedings of the 8th International Conference on Computer Methods and Advances in Geomechanics, volume 1, Morgantown, WV, United states: A.A. Balkema, 1994: 47-59.
 [7] 段雪铭, 李亮, 杜修力, 等. 基于精细时程积分的饱和两相介质波动问题时域解法[J]. 岩土力学, 2015, 36(9): 2702-2707, 2715.
 Duan X M, Li L, Du X L, et al. A precise time-integration method for wave propagation of fluid

- saturated porous media [J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2015, 36(9): 2702-2707, 2715. (in Chinese)
- [8] 宋佳, 许成顺, 杜修力, 等. 基于精细时程积分的 $u-p$ 格式饱和两相介质动力问题的显-显式时域算法 [J]. *工程力学*, 2017, 34(11): 9-17.
Song J, Xu C S, Du X L, et al. A temporal explicit-explicit algorithm based on the precise time-integration for solving the dynamic problems of fluid-saturated porous media in $u-p$ form [J]. *Engineering Mechanics*, 2017, 34(11): 9-17. (in Chinese)
- [9] Xu C S, Song J, Du X L, et al. A completely explicit finite element method for solving dynamic $u-p$ equations of fluid-saturated porous media [J]. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 2017, 97: 364-376.
- [10] 李亮, 李果, 杜修力, 等. 饱和两相介质近场波动问题的一种时域全显式数值计算方法 [J]. *工程力学*, 2020, 37(8): 20-31.
Li L, Li G, Du X L, et al. A fully explicit numerical method in time domain for near-field wave problems in saturated two-phase media [J]. *Engineering Mechanics*, 2020, 37(8): 20-31. (in Chinese)
- [11] 赵成刚, 闫华林, 李伟华, 等. 考虑耦合质量影响的饱和多孔介质动力响应分析的显式有限元法 [J]. *计算力学学报*, 2005(5): 555-561.
Zhao C G, Yan H L, Li W H, et al. Dynamic analysis of fluid saturated porous media by using explicit finite element method considering the effects of coupling mass [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2005 (5): 555-561. (in Chinese)
- [12] Liao Z P, Wong H L. A transmitting boundary for the numerical simulation of elastic wave propagation [J]. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 1984, 3(4): 174-183.
- [13] 王勖成. 有限单元法 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2003.
Wang X C. Finite element method [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2003. (in Chinese)
- [14] Simon B R, Zienkiewicz O C, Paul D K. An analytical solution for the transient response of saturated porous elastic solids [J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 1984, 8(4): 381-398.
- [15] Berryman J G. Confirmation of Biot's theory [J]. *Applied Physics Letters*, 1980, 37(4): 382-384.

(本文编辑: 池营营)