

DOI:10.13409/j.cnki.jdpme.201910064

双肢剪力墙考虑剪切变形和转动惯量时的自振周期*

陈博文^{1,2}, 任文杰¹, 张松毅¹

(1. 河北工业大学土木与交通学院, 天津 300401; 2. 华北理工大学轻工学院, 河北唐山 064000)

摘要: 剪力墙结构在水平振动时的自振周期是确定地震作用时首要的动力特性参数。以双肢剪力墙为例, 按是否考虑剪切变形和转动惯量的影响分成两种方法, 根据结构自由振动微分方程及其自振周期公式, 计算比较了不同墙肢宽高比下两种方法的计算结果, 分析了剪切变形和转动惯量对结构自振周期的影响。计算结果表明: 考虑剪切变形和转动惯量时, 双肢剪力墙结构自振周期增加, 且随着振型的提高自振周期涨幅增大; 当左右墙肢宽度相等, 墙肢宽高比大于等于 1/7、1/9 和 1/12 时, 相应地计算结构第一、第二和第三自振周期时不能忽略剪切变形和转动惯量的影响。

关键词: 双肢剪力墙; 剪切变形; 转动惯量; 自振周期

中图分类号: TU973 **文献标识码:** A **文章编号:** 1672-2132(2021)06-1264-07

Calculation of Natural Vibration Period of Coupled Shear Wall Considering Shear Deformation and Moment of Inertia

CHEN Bowen^{1,2}, REN Wenjie¹, ZHANG Songyi¹

(1. School of Civil and Transportation Engineering, Hebei University of Technology, Tianjin 300401, China;
2. Qinggong College, North China University of Science and Technology, Tangshan 064000, China)

Abstract: The horizontal natural vibration period of shear wall structure is the most important dynamic characteristic parameter for seismic design. Taking the coupled shear wall as an example, two methods are defined according to whether the shear deformation and moment of inertia are considered or not. Numerical simulation of the two methods for natural vibration period of the coupled shear wall with different width-height ratios of wall pier (B_1/H) is conducted based on differential equations and period formulas of structural natural vibration. The influences of shear deformation and moment of inertia on the natural vibration period are analyzed. The results show that, while considering the shear deformation and moment of inertia, the natural vibration period increases, and more increment is seen on higher mode; while the width of two wall piers is equal, the influence of shear deformation and moment of inertia on the 1st, the 2nd and the 3rd mode of the natural vibration period cannot be neglected for $B_1/H \geq 1/7$, 1/9 and 1/12, respectively.

Keywords: coupled shear wall; shear deformation; moment of inertia; natural vibration period

* 收稿日期: 2019-10-30; 修回日期: 2020-02-08

基金项目: 国家自然科学基金项目(51878240)资助

作者简介: 陈博文(1986—), 男, 讲师, 博士。主要从事结构振动控制及抗震设计研究。E-mail: bowen_db@126.com

通讯作者: 任文杰(1972—), 女, 教授, 博导, 博士。主要从事结构振动控制及抗震设计研究。E-mail: rwjwlq@126.com

引言

剪力墙结构是指利用建筑物混凝土墙体作为承受竖向荷载和抵抗水平荷载的结构,在震区的高层建筑中得到了广泛应用^[1]。剪力墙结构的水平振动自振周期作为其动力特性参数之一,影响结构在震作用下的荷载效应是否满足结构整体稳定性、位移限值、承载力以及最小剪重比等指标^[2-3],因此合理确定结构的自振周期显得尤为关键。目前,对于剪力墙结构自振周期的计算,通常采用经验公式或理论分析两种计算方法。

学者们通过大量研究提出了一些经验公式用于实际应用:徐培福等^[4]根据我国414栋高度在50 m以上,高层建筑结构实测结果给出了结构在不同高度范围内前三阶自振周期的合理分布范围;沈蒲生等^[5]对我国近年来302栋已建和在建的高层及超高层建筑的自振周期进行拟合,得到了我国高层及超高层建筑基本自振周期的估算公式;闫培雷等^[6]采用环境激励法根据97栋高度在45~100 m的高层剪力墙结构实测结果给出了剪力墙结构前三阶自振周期的经验公式和分布范围。另外,国内外规范也给出了经验公式,如:我国荷载规范^[7]、美国FE-MA 450^[8]、ASCE 7-10^[9]、欧洲结构抗震设计规范Eurocode8^[10]、日本规范BSLJ-2004^[11]等。这些经验公式的确定主要是考虑了墙肢长度或高度的影响;L.H.Lee等^[12]和A.Badkoubeh等^[13]对大量剪力墙结构实测周期与经验公式的比较表明二者存在较大误差,且对于同一高度建筑物的许多实测周期也是完全不同的,故仅考虑墙肢的长度或高度并不能准确计算结构自振周期。

学者们也提出了一些计算结构自振周期的理论方法:能量法、等效质量法、顶点位移法等,其中应用较多的是直接建立结构振动微分方程并进行求解^[14]。如:包世华等^[15]将连梁的作用简化为对墙肢的约束弯矩,建立了剪力墙结构水平振动微分方程并求解,给出了剪力墙结构自振周期的表达式,为了简化计算,微分方程建立时忽略了剪切变形和转动惯量的影响;Q.F.Wang等^[16]将连梁简化为连续且不可压缩的构件,由整体结构的挠曲线方程求解自振周期,但限于求解结构前两阶振型所对应的

自振周期,对于高阶振型的求解没有明确说明;Y.H.Chai等^[17]考虑了剪切变形,将双肢剪力墙中的连梁简化为等效薄板,将整体结构取隔离体分析,建立了一个六阶齐次微分方程,但方程求解较为繁琐。

本文以双肢剪力墙为例,根据文献[15]给出的剪力墙结构的自由振动微分方程及其自振周期计算公式(不考虑剪切变形和转动惯量建立的自振周期公式为方法1,考虑剪切变形和转动惯量建立的自振周期公式为方法2),计算比较不同墙肢宽高比下两种方法的计算结果,分析剪切变形和转动惯量对结构自振周期的影响。

1 双肢剪力墙简化计算模型

如图1(a)所示,一双肢剪力墙结构,假设质量和刚度沿高度方向分布均匀,结构变形为弯曲线,同层各节点在水平振动时转角相同, I_1 和 I_2 分别为左右墙肢的截面惯性矩, A_1 和 A_2 分别为左右墙肢的截面面积, I_b 为连梁的截面惯性矩, A_b 为连梁的截面面积, m_1 和 m_2 分别为左右墙肢沿高度方向单位长度的质量, B_1 和 B_2 分别为左右墙肢肢长, H 为结构总高, h 为层高, $2a$ 为连梁的计算跨度, $2c$ 为墙肢的轴线间距。

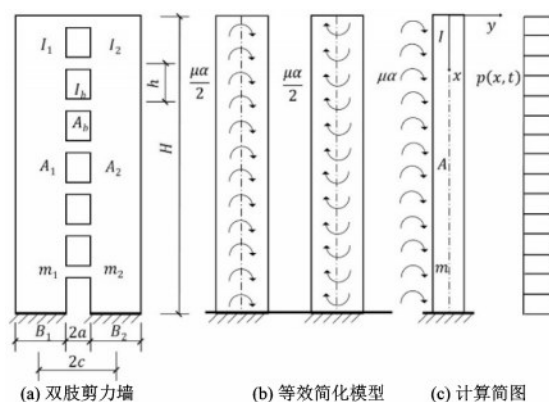


图1 双肢剪力墙及计算简图

Fig.1 Coupled shear wall and calculation diagram

假定各连梁对左右墙肢的约束弯矩沿层高连续化,如图1(b)所示;左右墙肢计算简图可合并为一悬臂梁,如图1(c)所示。图中, $p(x,t)$ 为外荷载, I 、 A 和 m 为合成梁的惯性矩、截面面积和沿高度方向单位长度的质量, $I = I_1 + I_2$, $A = A_1 + A_2$, $m =$

$m_1 + m_2$, α 为墙截面转角, μ 为连梁的杆端转动刚度除以层高:

$$\mu = \frac{6ED}{h} \quad (1)$$

$$D = \frac{\bar{I}_b c^2}{a^3} \quad (2)$$

$$\bar{I}_b = \frac{I_b}{1 + \frac{3EI_b}{a^2 k'GA_b}} \quad (3)$$

式中, E 为材料的弹性模量; D 为连梁的杆端转动刚度系数; \bar{I}_b 为连梁考虑剪切变形的折算惯性矩; G 为剪切弹性模量; k' 为截面剪应力不均匀系数。

2 振动微分方程的建立和求解

2.1 不考虑剪切变形和转动惯量

文献[15]给出了不考虑剪切变形和转动惯量时双肢剪力墙的振动微分方程、特征方程和自振周期, 公式为:

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - \mu \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} 2\lambda_1^2 \lambda_2^2 + (\lambda_1^4 + \lambda_2^4) \operatorname{ch} \lambda_1 \cos \lambda_2 + \\ \lambda_1 \lambda_2 (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \operatorname{sh} \lambda_1 \sin \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1^2 - \lambda_2^2 = \frac{\mu}{EI} H^2 = \lambda^2 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$T_i = \eta_i \sqrt{\frac{mH^4}{EI}} \quad (6)$$

$$\eta_i = \frac{2\pi}{\lambda_{1i} \lambda_{2i}} \quad (7)$$

式中, T_i , η_i 为结构不考虑剪切变形和转动惯量时第 i 阶自振周期及自振周期系数。

2.2 考虑剪切变形和转动惯量

考虑剪切变形和转动惯量的影响, 假设左右两个墙肢弯曲位移和剪切位移相等, 如图 2 所示。

左侧墙肢微元的平衡方程为:

$$\frac{\partial V_1(x, t)}{\partial x} = p(x, t) - m_1 \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} \quad (8)$$

$$\frac{\partial M_1(x, t)}{\partial x} = V_1(x, t) + m_1 r_1^2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} + \frac{\mu \alpha}{2} \quad (9)$$

同理, 右侧墙肢微元的平衡方程为:

$$\frac{\partial V_2(x, t)}{\partial x} = -m_2 \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} \quad (10)$$

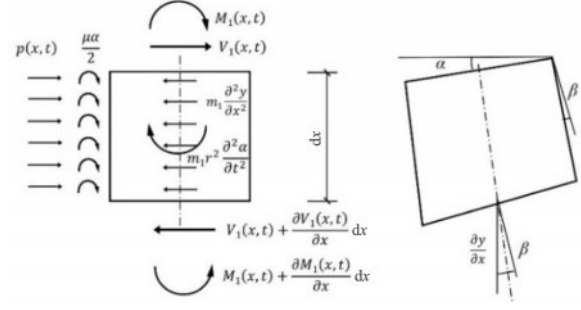


图2 左侧墙肢微元的平衡和变形

Fig.2 Balance and deformation of microsegment in left wall pier

$$\frac{\partial M_2(x, t)}{\partial x} = V_2(x, t) + m_2 r_2^2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} + \frac{\mu \alpha}{2} \quad (11)$$

将左右两个墙肢的平衡方程合并, 得到:

$$\frac{\partial V(x, t)}{\partial x} = p(x, t) - m \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} \quad (12)$$

$$\frac{\partial M(x, t)}{\partial x} = V(x, t) + m r^2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} + \mu \alpha \quad (13)$$

式中, $M(x, t)$ 为作用于截面上的弯矩; $V(x, t)$ 为作用于截面上的剪力; $m r^2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2}$ 为单位长度的转动惯量。

引入内力与变形间的关系^[18]:

$$V = k'GA\beta \quad (14)$$

$$M(x, t) = EI \frac{\partial \alpha}{\partial x} \quad (15)$$

$$\beta = \alpha - \frac{\partial y}{\partial x} \quad (16)$$

式中, β 为截面的剪切变形。

将式(14)~式(16)代入式(12)、(13), 整理得到水平振动时的平衡微分方程为:

$$\begin{aligned} EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{EI}{k'GA} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(p - m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right) - \left(p - m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right) - \\ m r^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} - \frac{m^2 r^2}{k'GA} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(p - m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right) - \\ \mu \left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{k'GA} \left(p - m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

自由振动时:

$$\begin{aligned} EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - m r^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} - \frac{EI m}{k'GA} \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} + \\ \frac{m^2 r^2}{k'GA} \frac{\partial^4 y}{\partial t^4} - \mu \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{m}{k'GA} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

式(18)即为双肢剪力墙考虑剪切变形和转动

惯量时的水平振动微分方程,对应的特征方程和自振周期公式为:

$$\left(\lambda_1^2 - \lambda_2^2 + \frac{\mu}{EI}\right) \left[1 - \frac{3}{4}r^2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) + \frac{9}{4}r^2\frac{\mu}{EI}\right] - 4r^2\lambda_1^2\lambda_2^2 = 0 \quad (19)$$

$$\left(2\lambda_1^2 + 6\lambda_2^2 - \frac{6\mu}{EI}\right) + \left[\frac{\left(\lambda_1^2 + 3\lambda_2^2 - \frac{3\mu}{EI}\right)^2}{\left(3\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \frac{3\mu}{EI}\right)} + \left(3\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \frac{3\mu}{EI}\right)\right] \cos\lambda_1 H \operatorname{ch}\lambda_2 H + \frac{\left(\lambda_1^2 + 3\lambda_2^2 - \frac{3\mu}{EI}\right)(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)}{\lambda_1\lambda_2} \sin\lambda_1 H \operatorname{sh}\lambda_2 H = 0 \quad (20)$$

$$T_i' = \frac{4\pi r}{\sqrt{\lambda_{1i}^2 - \lambda_{2i}^2 + \frac{\mu}{EI}}} \sqrt{\frac{m}{EI}} \quad (21)$$

假定两个墙肢相等, $I_1 = I_2, A_1 = A_2, m_1 = m_2$, 将 $\theta = \lambda_1 H, \varphi = \lambda_2 H, r^2 = (I_1 + I_2)/(A_1 + A_2), \lambda^2 = (\mu/EI)H^2$ 代入式(19)~式(21), 整理得:

$$\left(\theta^2 - \varphi^2 + \lambda^2\right) \left[1 - \frac{1}{16} \left(\frac{B_1}{H}\right)^2 (\theta^2 - \varphi^2) + \frac{3}{16} \left(\frac{B_1}{H}\right)^2 \lambda^2\right] - \frac{1}{3} \left(\frac{B_1}{H}\right)^2 \theta^2 \varphi^2 = 0 \quad (22)$$

$$\left(2\theta^2 + 6\varphi^2 - 6\lambda^2\right) + \left[\frac{\left(\theta^2 + 3\varphi^2 - 3\lambda^2\right)^2}{\left(3\theta^2 + \varphi^2 + 3\lambda^2\right)} + \left(3\theta^2 + \varphi^2 + 3\lambda^2\right)\right] \cos\theta \operatorname{ch}\varphi + \frac{\left(\varphi^2 - \theta^2\right)\left(\theta^2 + 3\varphi^2 - 3\lambda^2\right)}{\theta\varphi} \sin\theta \operatorname{sh}\varphi = 0 \quad (23)$$

$$T_i' = \eta_i' \sqrt{\frac{mH^4}{EI}} \quad (24)$$

$$\eta_i' = \frac{\sqrt{\frac{4}{3}\pi\frac{B_1}{H}}}{\sqrt{\theta_i^2 - \varphi_i^2 + \lambda^2}} \quad (25)$$

式中, T_i', η_i' 为结构考虑剪切变形和转动惯量时第 i

阶自振周期及自振周期系数。

3 自振周期的计算

3.1 计算概况

算例中考虑两个墙肢相等,公式(24)、(25)与公式(6)、(7)的对比表明二者计算的自振周期区别在于自振周期系数的差异,因此本文以双肢剪力墙前三阶自振周期系数为指标进行研究,分别采用方法1和方法2进行计算。由式(25)可知,考虑剪切变形和转动惯量时,墙肢宽高比 B_1/H 对自振周期系数影响较为显著,在利用方法2计算时,设定不同的 B_1/H , 取值为: $\frac{B_1}{H} = \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \frac{1}{12}, \frac{1}{15}$ 。需要提出的是, B_1/H 的取值范围应满足结构为双肢剪力墙 ($1 \leq$ 整体系数 < 10) 的受力特点且满足结构最大高宽比的限定条件。

3.2 计算结果比较分析

利用 MATLAB 编制程序求解特征方程,对于固定的 B_1/H , 可以求出不同 λ 对应的 θ 和 φ , 进而求得自振周期系数 η_i 。前三阶振型的自振周期系数曲线如图3所示,由图可见:

(1) 对于固定的 B_1/H , 当 $\lambda = 0$ 时, $\mu = 0$, 即此时不考虑连梁的作用,利用方法2计算的前三阶自振周期计算系数结果最大,随着 λ 增大,前三阶自振周期的计算系数逐渐减小,说明连梁的存在会降低结构的自振周期,与方法1不考虑剪切变形和转动惯量时规律相同。

(2) 对于固定的 B_1/H , 利用方法2计算的双肢剪力墙结构的前三阶自振周期系数与方法1的结果变化趋势相吻合,但整体计算结果都大于后者,说明考虑剪切变形和转动惯量后,双肢剪力墙结构自振周期将增大。

对于固定的 B_1/H , 将结构第二自振周期 T_2' 和第三自振周期 T_3' 分别与第一自振周期 T_1' 的比值取平均值和标准差 ($\lambda = 0 \sim 6$), 列于表1。由表1可知,方法2计算的比值结果均符合文献[6]给出的高层混凝土剪力墙结构自振周期比值的合理范围: 当

45 m ≤ H ≤ 100 m 时, $T_2'/T_1' = 0.188 \sim 0.35$;
 $T_3'/T_1' = 0.081 \sim 0.177$ 。

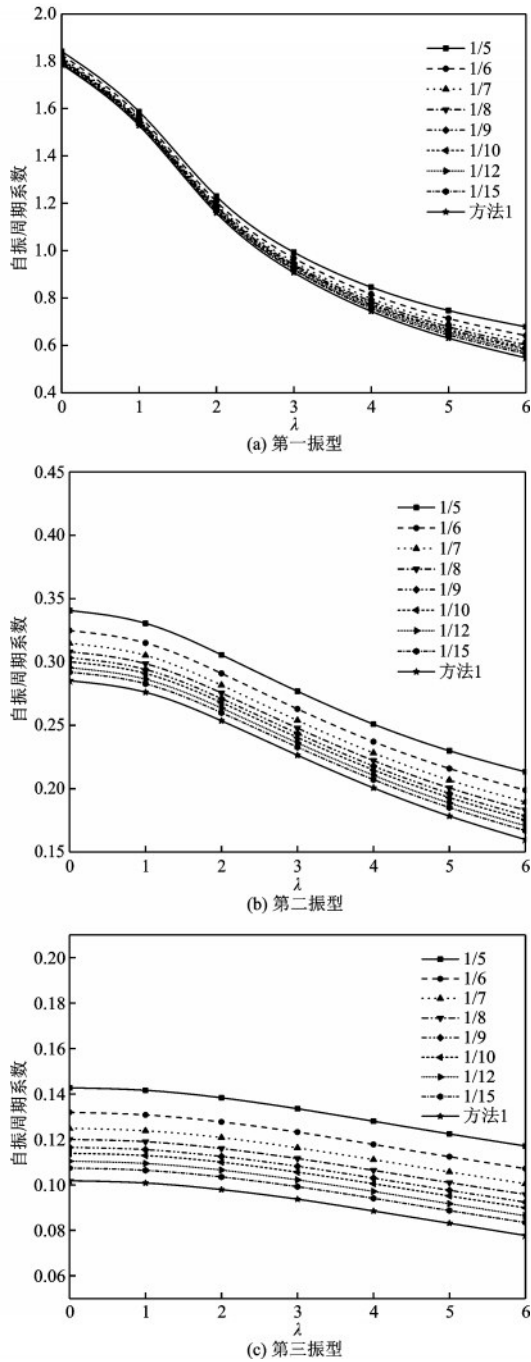


图3 双肢剪力墙结构自振周期系数曲线
 Fig.3 Curves of $\lambda - \eta_i$ for coupled shear wall

定义两种方法自振周期的差值比 $= (T_i' - T_i) / T_i$, 计算不同 λ 对应的前三振型自振周期差值比曲线如图4所示。由图4可知, 当 $\lambda = 6$ 时, 两种方法前三振型周期差值比最大, 将差值比最大值列于表2, 可见:

表1 周期比平均值和标准差

Table 1 Average and standard deviation of period ratio

B_1/H	T_2'/T_1'		T_3'/T_1'	
	平均值	标准差	平均值	标准差
1/5	0.262 7	0.046 8	0.128 8	0.034 1
1/6	0.256 3	0.047 8	0.122 5	0.033 9
1/7	0.251 9	0.048 1	0.118 0	0.033 5
1/8	0.248 7	0.048 2	0.114 7	0.033 1
1/9	0.246 3	0.048 2	0.112 2	0.032 7
1/10	0.244 5	0.048 0	0.110 2	0.032 3
1/12	0.242 2	0.048 0	0.107 6	0.031 8
1/15	0.240 1	0.0480	0.105 1	0.031 4

(1) 随着 B_1/H 减小, 两种方法前三振型自振周期最大差值比越小, 说明剪切变形和转动惯量对于墙肢宽高比越大的结构影响越明显。

(2) 对于固定的 B_1/H , 随着振型的提高, 两种方法计算的自振周期最大差值比越大, 说明剪切变形和转动惯量对高阶振型下的结构自振周期影响比较明显。

(3) 当 B_1/H 等于 1/7、1/9 和 1/12 时, 相应地计算结构第一、第二和第三自振周期差值比分别为 12.828 9%、11.702 1% 和 11.196 9%, 超过了工程允许 10% 的误差范围, 需要考虑剪切变形和转动惯量的影响。

表2 两种方法前三振型自振周期最大差值比

Table 2 The maximum difference ratio of T_i of the two methods 单位: %

B_1/H	第一振型	第二振型	第三振型
1/5	23.940 1	33.479 3	50.707 9
1/6	17.087 0	24.468 1	37.837 8
1/7	12.828 9	18.585 7	29.343 6
1/8	9.978 1	14.580 7	23.294 7
1/9	7.949 6	11.702 1	18.918 9
1/10	6.560 7	9.637 0	15.701 4
1/12	4.550 4	6.821 0	11.196 9
1/15	3.070 2	4.443 1	7.335 9

4 结 论

本文以双肢剪力墙为例, 按照是否考虑剪切变形和转动惯量的影响分成两种方法, 计算比较了不

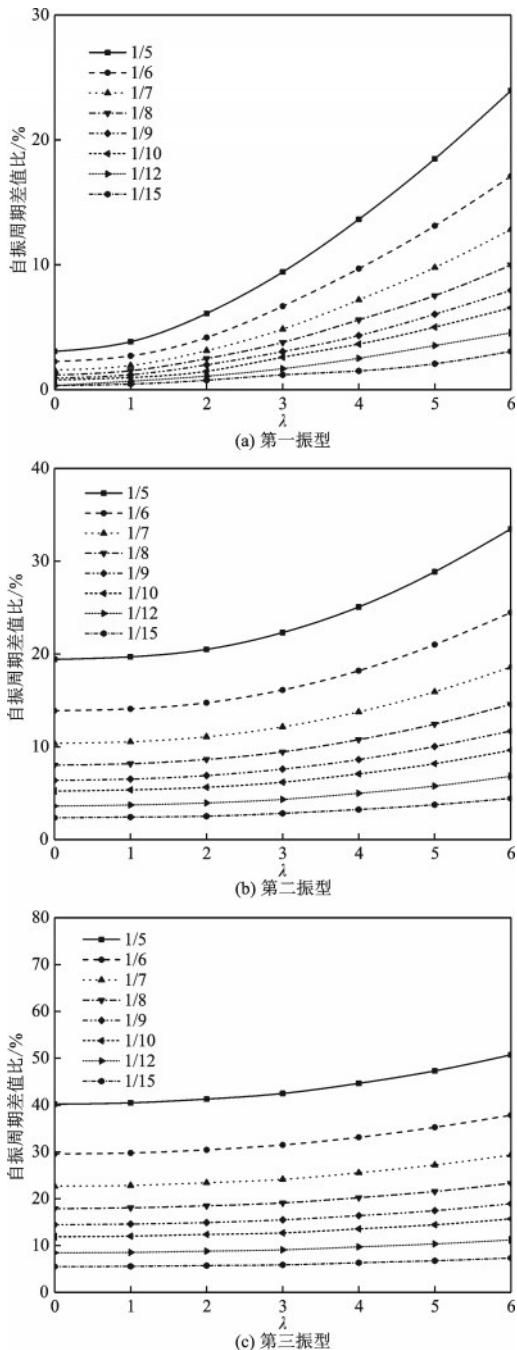


图4 两种方法前三阶振型自振周期差值比曲线

Fig.4 Difference ratio curves of natural vibration period of the two methods

同墙肢宽高比下两种方法的计算结果,分析了剪切变形和转动惯量对结构自振周期的影响。计算结果表明:

(1)考虑剪切变形和转动惯量后,双肢剪力墙结构自振周期将增加,且随着振型的提高自振周期涨幅增大。

(2)当左右墙肢宽度相等,墙肢宽高比大于等

于1/7、1/9和1/12时,相应地计算结构第一、第二和第三自振周期时不能忽略剪切变形和转动惯量的影响。

参考文献:

- [1] 傅学怡.实用高层建筑设计[M].2版.北京:中国建筑工业出版社,2010.
Fu X Y. Applied structural design of tall building[M]. 2nd ed. Beijing: China Architecture & Building Press, 2010. (in Chinese)
- [2] 高层建筑混凝土结构技术规范:JGJ 3—2010[S].北京:中国建筑工业出版社,2010.
- [3] 建筑抗震设计规范(2016版):GB 50011—2010[S].北京:中国建筑工业出版社,2016.
- [4] 徐培福,肖从真,李建辉.高层建筑结构自振周期与结构高度关系及合理范围研究[J].土木工程学报,2014,47(2):1-11.
Xu P F, Xiao C Zh, Li J H. Study on relationship between natural vibration periods and heights of structures for high-rise buildings and its reference range [J]. China Civil Engineering Journal, 2014, 47(2): 1-11. (in Chinese)
- [5] 沈蒲生,张超,叶缙焱,等.我国高层及超高层建筑的基本自振周期[J].建筑结构,2014,44(18):1-3.
Shen P Sh, Zhang Ch, Ye J Y, et al. Fundamental natural period of high-rise and super high-rise buildings in China [J]. Building Structure, 2014, 44(18): 1-3. (in Chinese)
- [6] 闫培雷,孙柏涛.基于环境激励法的高层钢筋混凝土剪力墙结构自振周期经验公式研究[J].工程力学,2019,36(2):87-95.
Yan P L, Sun B T. Study on empirical formula of natural vibrational period of high-rise reinforced concrete shear wall structure based on environmental motivation method [J]. Engineering Mechanics, 2019, 36(2): 87-95. (in Chinese)
- [7] 建筑结构荷载规范:GB 50009—2012 [S].北京:中国建筑工业出版社,2012.
- [8] FEMA 450 NEHRP Recommended provisions for seismic regulations for new buildings and other structures [S]. Washington D. C.: National Institute of Building Sciences, 2004.

